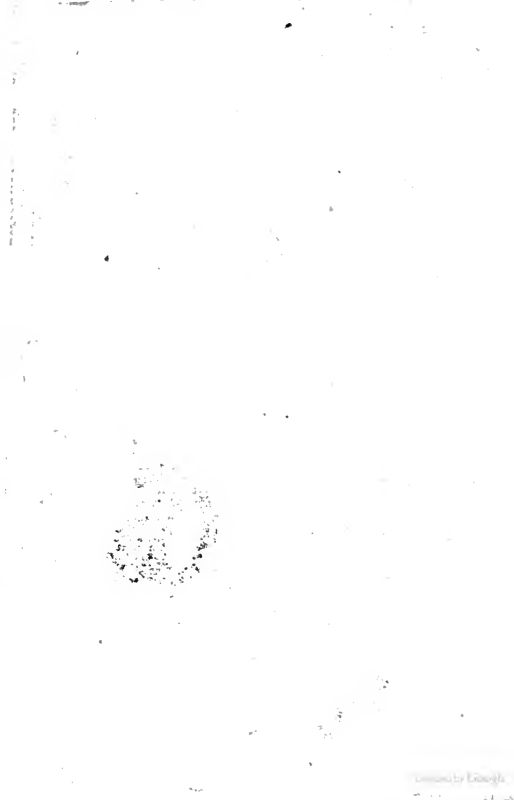
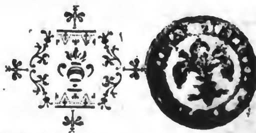


TRAITÉ
ELEMENTAIRE
DE
MÉCHANIQUE
ET DE
DINAMIQUE,

Appliqué principalement aux Mouvemens des Machines.

Par M. l'Abbé BOSSUT, Professeur Royal de Mathématiques aux Écoles du Génie, à Méziètes, Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris.



A CHARLEVILLE,

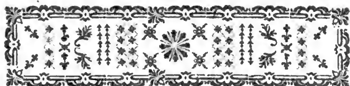
Chez PIERRE THESIN, Imprimeur - Libraire ordinaire de Son Alt. Sérén. Mgr. le Prince DE CONDÉ.

M. DCC. LXIII.

AVEC APROBATION ET PRIVILÈGE DU ROY.

AD USO della ſcuola di Matematica del Battaglione dell'Artiglieria, e del Corpo degl' Ingegneri di S.A.R.





A MONSEIGNEUR

LE DUC DE CHOISEUL,

PAIR DE FRANCE, CHEVALIER DES ORDRES DU ROY, ET DE CELUI DE LA TOISON D'OR, LIEUTENANT GENERAL DES ARMÉES DE SA MAJESTÉ, COLONEL GENERAL DES SUISSES ET GRISONS, GOUVERNEUR DE TOURAINE, MINISTRE ET SECRETAIRE D'ÉTAT, GRAND MAITRE ET SURINTENDANT-GENERAL DES POSTES, &c.



ONSEIGNEUR,

L'Ouvrage que j'ai l'honneur de vous présenter, a été composé pour l'instruction des

Éléves d'un Corps également distingué par les Talens & par la Bravoure. A ce Titre, Monseigneur, il avoit droit de paroître sous vos auspices. Environné de tout l'éclat que donnent la Naissance & les Dignités, vous ne dédaignez point une autre sorte de gloire, dont la solidité ne peut être bien sentie que par des Génies tels que le Votre : Vous aimez, vous protégez les Sciences & les Lettres. Soyez assuré, Monseigneur, qu'elles n'en perdront jamais le souvenir. L'Histoire en peignant les qualités de l'Homme d'État que l'Europe admire en vous, & qui vous ont mérité la confiance du Roi, comptera parmi toutes vos vertus, le goût & la Bienfaisance du favori d'Auguste.

Je suis aves un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très humble & très-obéïssant Serviteur
BOSSUT.

PREFACE.

JE ne m'arrêterai point ici à prouver au long l'utilité de la Méchanique. Elle se montre assés dans ces Machines que l'art invente ou perfectionne tous les jours. Il y a plus. Les recherches dont cette Science s'occupe, sont très-propres à éxercer, à nourrir, à étendre l'esprit; & cet avantage n'est pas moins réel, que le prémier, aux yeux de quiconque sait penser. » Tout » ce qui nous éleve, dit M. de Fontenel» le, à des réfléxions qui, quoique pure» ment spéculatives, sont grandes & no» bles, est d'une utilité qu'on peut apeller » spirituelle & philosophique. L'esprit » a ses besoins, & peut être aussi étendus » que ceux du corps.

La Méchanique en général se divise en deux parties, dont l'une qu'on nomme la *Statique*, détermine les loix de l'équilibre

des Machines, l'autre apellée ſimplement *Méchanique*, conſidére le mouvement des corps; & on donne en particulier le nom de *Dynamique* à cette branche très-étenduë de la Méchanique, qui conſidére le mouvement des corps en tant qu'il eſt produit ou altéré par leur action mutuelle. Comme les principes de la Statique ſont fort-ſimples & en fort petit nombre, pluſieurs Auteurs les ont expliqués avec ſuccès. On ne manque pas non plus d'Ouvrages ſur la Méchanique proprement dite; mais de ces ouvrages, les uns ne contiennent preſque rien, les autres ne ſont pas à la portée d'un aſſez grand nombre de Lecteurs. Il m'a parû qu'on déſiroit depuis long-tems un Livre élémentaire qui remplit le double objet, d'expoſer dans un ordre ſiſtématique les principes fondamentaux de la Méchanique, & de montrer l'aplication de ces mêmes principes aux

Problêmes les plus curieux, ou les plus utiles dans la pratique. J'ai entrepris ce Livre ; on jugera ſi j'ai répondu à l'attente du Public : voici le plan que je me ſuis propoſé.

Je débute par pluſieurs Notions préliminaires ſur la nature de la matière, du tems, de l'eſpace, &c. On ſent bien que la matière n'eſt enviſagée ici que ſous l'aſpect général de ſubſtance étenduë & impénétrable. Sans éxaminer ſi elle eſt réellement diviſible ou non à l'infini, je demande qu'il ſoit permis de regarder un corps comme l'aſſemblage d'une infinité de molécules qui en ſont les élémens. Cette ſupoſition dont on a beſoin dans la Méchanique, eſt analogue à celle que font les Géomêtres, lorſqu'ils regardent la ligne comme compoſée d'une infinité de petites lignes élémentaires, la ſurface comme compoſée d'une infinité de petites

ſurfaces, &c. De même, en parlant du tems & de l'eſpace, j'évite toutes les diſputes frivoles que la Méthaphyſique a élevées ſur la nature de l'un & de l'autre. J'ai adopté les définitions que Neuton en donne, & je ne me ſuis pas même fait ſcrupule d'employer quelquefois ſes propres paroles. Par cette méthode d'écarter tout ce qui eſt étranger au ſujet, & de ne raiſonner que ſur des idées ſimples & claires, je parviens à donner des Notions diſtinctes du mouvement, ſoit abſolu, ſoit relatif, & des agents ou forces deſtinées à produire, ou à détruire le mouvement. Cette eſpéce d'introduction eſt terminée par quelques Axiomes qui concernent la force d'inertie de la matière, le principe de la compoſition & de la décompoſition des mouvemens, &c. Paſſons au corps même de l'Ouvrage.

Des deux Livres dans leſquels ce Traité

entier eſt diviſé, le prémier conſidére les propriétés générales du mouvement. Il eſt compoſé de deux Chapitres.

Le prémier Chapitre traite du mouvement uniforme. On y détermine les relations entre les eſpaces parcourus, les tems, les viteſſes, les forces motrices, les maſſes; & on exprime ces relations par des formules générales qui renferment la ſubſtance des raiſonnemens ſur leſquels elles ſont fondées, & qui ſervent à démontrer une infinité de Théorêmes particuliers, comme on le voit par diférens Exemples que j'ai raportés.

Dans le ſecond Chapitre, je commence par expoſer la théorie des mouvemens variés en général. Je m'attache à bien déveloper la nature des forces accélératrices ou retardatrices, qu'on déſigne d'ordinaire ſous le nom commun *de Forces de Preſſion*; & je fais ſentir la diſtinction

qu'il faut mettre entre ces ſortes de forces, & les forces des corps actuellement en mouvement, qu'on peut apeller *Forces de Percuſſion.* Enſuite j'explique au long les propriétés des mouvemens uniformément accélérés ou retardés : j'exprime ces propriétés par des formules générales dont je fais l'aplication aux mouvemens des corps qui tombent par leur péſanteur, ou qui gliſſent ſur des plans inclinés.

Le ſecond Livre qui eſt la partie principale de cet Ouvrage, & qu'on doit regarder comme contenant des élémens de Dynamique aſſés étendus, a pour objet la détermination des mouvemens qui réſultent de l'action & de la réaction de pluſieurs corps les uns ſur les autres. Je l'ai diviſé en cinq Chapitres.

Dans le prémier, j'expoſe la loi fondamentale de la communication des mouvemens. Cette loi conſiſte dans une éga-

lité conſtante entre les mouvemens perdus par quelques uns des corps du Siſtême, & les mouvemens gagnés en conſéquence par les autres corps. Je fais voir comment elle doit être employée, ſoit que le Siſtême ſoit parfaitement libre, ſoit qu'il ſoit gêné dans ſon mouvement par quelque obſtacle fixe. Je me ſuis ſervi de ce principe avec Neuton, Maclaurin, &c. parce qu'il eſt très-ſimple, très-fécond, & qu'il m'a paru facile à expliquer clairement dans un Ouvrage élémentaire; mais je ſuis bien éloigné d'ailleurs de proſcrire l'uſage d'aucun autre principe dans la Dynamique. Comme la nature eſt infiniment variée dans ſes opérations, on ne ſauroit trop multiplier les moyens d'en découvrir le Méchaniſme. MM. Huighens, Jean Bernoulli, Daniel Bernoulli, Euler, Clairaut, Bouguer, Montigni, de Courtivron, d'Arcy, &c. ont donné

en ce genre d'excellens Écrits dont je connois tout le mérite. J'ai cité plusieurs fois (& je ne saurois trop citer) le Traité de Dynamique de M. d'Alembert. L'Auteur qui posséde la Métaphysique des Sciences en un dégré éminent, a sçu réduire toutes les loix de la Dynamique à celles de la Statique ordinaire, & il s'est élevé ainsi à des Problêmes qui ne paroissoient pas traitables par toute autre méthode.

Le second Chapitre est une aplication du principe qu'on vient d'indiquer, aux mouvemens qui résultent de la percussion mutuelle des corps. J'y donne toute la Théorie du choc des corps durs ou élastiques, soit qu'un corps en aille choquer un autre seulement, soit qu'il en rencontre tout à la fois un nombre quelconque d'autres disposés comme on voudra par raport à sa direction. Toute la limitation

qu'il y a à la généralité de ces Problêmes, eſt que les corps ſont ſupoſés ſphériques, ou que les forces perpendiculaires à leurs ſurfaces aux endroits des contacts, paſſent par leurs centres de gravité particuliers.

Dans le troiſiéme Chapitre, j'éxamine les mouvemens d'un corps libre de figure quelconque, qui eſt frappé ou pouſſé ſuivant une direction qui ne paſſe pas par ſon centre de gravité. On voit que ce Chapitre eſt une eſpèce de ſuplément au précédent, & qu'il s'étend auſſi aux mouvemens produits par les forces de preſſion. Ayant d'abord obſervé qu'on ne peut pas traiter dans ces élémens, le cas trop compliqué & trop dificile où le corps eſt partagé en deux parties diſſemblables par le plan qui paſſe par le centre de gravité & par la direction de la force imprimée, je m'attache au ſeul cas ou le corps eſt par-

tagé en deux parties égales & ſymétriques par le plan dont on vient de parler ; & je démontre très-ſimplement que le centre de gravité du corps ſe meut de même que s'il ſe trouvoit ſur la direction de la force motrice, & qu'en même tems le corps tourne autour du centre de gravité, de même que ſi ce point étoit fixe. Je fais voir par un Problême général & par quelques aplications de ce Problême à des éxemples particuliers, la manière de ſe ſervir du Théorême dont il s'agit.

Le quatriéme Chapitre eſt deſtiné à la recherche des mouvemens que les machines prennent, lorſque les forces qui leur ſont apliquées, ne ſe font pas mutuellement équilibre. Cette matière ſi intéreſſante, ſi utile dans la pratique, avoit été à peine éfleurée. Je me ſuis étudié à la traiter avec tout le ſoin qu'elle mérite. Pour y parvenir, j'ai fait pluſieurs expériences

ſur les frottemens, & ſur la roideur des cordes; & j'ai donné le moyen d'évaluer, au moins à-peu-près, ces deux réſiſtances dans les cas où elles ont lieu. Je dis *à-peu-près*, car les diférentes circonſtances phyſiques qui ſe mélent dans l'éxécution & dans le jeu d'une machine, ne permettent pas d'atteindre ici à la rigueur géomêtrique. Non ſeulement je détermine les quantités dont les forces ſimplement requiſes pour faire équilibre aux fardeaux à élever, doivent être augmentées, afin que l'équilibre ſoit troublé & que le mouvement commence à lui ſuccéder: J'ai encore enſeigné à calculer & à prévoir les mouvemens qui naîtront de telles forces qu'on voudra apliquer à une machine donnée, en ayant égard, lorſqu'il eſt néceſſaire, au frottement & à la roideur des cordes. Si les réſultats des calculs ne quadrent pas toûjours rigoureu-

ſement avec l'expérience, il faut s'en prendre aux cauſes dont je viens de faire mention. Mais en admettant les Hypothéſes aſſez éxactes ſur leſquelles ces mêmes calculs ſont établis, les Problêmes ſont parfaitement réſolus, & doivent être rangés dans la claſſe des vérités géomêtriques. Quand on les enviſageroit ſous ce point de vûë ſeulement, ils ſeroient dignes d'attention.

Enfin pour fortifier deplus en plus le Lecteur dans l'uſage des principes de Dynamique, je donne dans le cinquiéme Chapitre les ſolutions de pluſieurs Problêmes qui concernent les mouvemens des Pendules tant ſimples que compoſés, & les mouvemens de rotation libre des corps ſoûmis ou non à l'action de la péſanteur.

Tel eſt l'ordre que j'ai ſuivi. Partout je me ſuis éforcé de réünir la préciſion à

la clarté ; de multiplier les Problêmes de méthodes, ſans m'apéſantir ſur le détail infini des aplications qu'on en peut faire avec le ſecours de la Géomêtrie ; de mettre de la ſimplicité & de l'élégance dans les Solutions. Il ne m'apartient pas d'aprécier moi-même mon Travail ; mais je crois pouvoir aſſurer qu'on y trouvera un aſſés grand nombre de choſes nouvelles, ou pour le fonds, ou pour la forme ſous laquelle elles ſont préſentées.

Il ne me reſte plus qu'à prévenir un reproche que pluſieurs Lecteurs ne manqueront pas, ſans doute, de me faire. Vous annoncez, me dira-t'on, un Traité élémentaire, & vous en couvrez les pages de caractères algébriques. Comment concilier le Livre avec le Titre ? Je prie qu'on me permette ſur cela quelques réfléxions.

La Méthode Synthétique dont ces

Perſonnes voudroient qu'on ſe ſervit toûjours, a l'avantage, j'en conviens, d'éclairer l'eſprit à chaque pas qu'il fait. En expoſant aux yeux la génération des Figures, & traçant les lignes qui doivent ſervir à démontrer un Théorême, ou à réſoudre un Problême, elle fixe l'attention ſur l'objet propoſé. Auſſi doit-on éxercer long-tems les Commençans par cette voye, parce qu'il s'agit d'abord principalement de les rendre attentifs. Mais avouons le ſans détour, cette méthode ne mêne pas loin. Pour peu qu'un Sujet ſoit compoſé, l'eſprit accablé laiſſe échaper la chaîne des raiſonnemens, & demeure en chemin. C'eſt alors que l'Analyſe eſt utile, & qu'on ne doit pas héſiter à l'employer. La vérité étant le ſeul but qu'on ſe propoſe, ne ſeroit-il pas abſurde de s'interdire un des principaux moyens d'y arriver? Que la ſynthéſe éta-

bliſſe donc bien nettement l'état d'une queſtion, qu'elle fourniſſe toutes les données néceſſaires pour la réſoudre ; mais qu'enſuite l'Analyſe ſupplée à ſon inſuffiſance, & achéve la Solution. En procédant ainſi, on aquérra une infinité de connoiſſances importantes, & on ne perdra rien de cette clarté qui caractériſe les Sciences éxactes; car le réproche d'obſcurité qu'on fait quelquefois à l'Analyſe, n'eſt rien moins que légitime : cette Méthode ne preſcrit pas une opération dont on n'aperçoive auſſitôt la raiſon, & qui ne ſoit fondée ſur des principes très-ſimples & très-lumineux.

Si on juge d'après ces remarques qui me paroiſſent vraies & ſolides, l'uſage que j'ai fait de l'analyſe, j'eſpére qu'on l'aprouvera. Il n'eſt pas poſſible de réſoudre ſans calcul la plûpart des Problê-

mes de Méchanique. Néanmoins pour faciliter davantage l'étude de cette Science, je n'ai employé que l'Algébre commune qui eſt une partie ſimplement élémentaire des Mathématiques. Je ne demande même à mes Lecteurs, qu'une certaine habitude dans la réſolution des équations du prémier & du ſecond dégré. Mais cette habitude eſt abſolument néceſſaire ; car comme je n'écris point un Traité d'Algébre, je n'ai pas crû devoir détailler toutes les opérations purement analytiques.



TRAITÉ *ÉLÉMENTAIRE* DE MÉCHANIQUE *ET DE* DYNAMIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.



A Matière eſt ſans ceſſe préſente à nos ſens; mais elle n'en eſt pas moins difficile à définir éxactement, parce qu'on n'eſt pas ſûr de connoître toutes les propriétés dont elle eſt douée, & que d'ailleurs, parmi celles qu'on connoît, l'ordre de priorité & de dépendance ne ſe manifeſte pas d'une manière bien claire. Je parle ici des pro-

priétés primitives & essentielles de la Matière, telles que l'étenduë, l'impénétrabilité, l'inertie, &c. & non de ces attributs accidentels, tels que le froid, le chaud, la couleur, &c. qui sont indiférens à son éxistence. Sans me jetter dans des discussions métaphysiques, qui seroient étrangères à l'objet de ce Traité, je définirai la Matière, une substance étenduë & impénétrable. Cette idée suffit dans la Méchanique où l'on fait abstraction de toutes les qualités physiques & externes de la Matière, & où l'on considére simplement les Phénomênes qui résultent de son étenduë & de son impénétrabilité.

II.

On appelle *Corps*, une mésure déterminée de Matière. Tout Corps est composé, ou peut être censé composé, d'une infinité de Molécules qui en sont les élémens. Lorsque ces Molécules élémentaires sont adhérentes les unes aux autres & ne cédent qu'avec peine à leur séparation mutuelle, le corps est *Solide*; mais si elles ne tiennent point les unes aux autres, le corps est *Fluide* ou *Liquide*, &c. Il ne s'agit dans cet Ouvrage que de la Méchanique des corps solides.

Ici nos Lecteurs doivent se précautionner contre un préjugé dont on a d'abord de la peine à se défendre. Comme nous ne connoissons point de corps qui ne soit pésant, on est porté à croire que la pésanteur est essentielle à la Matière, & que ces mots *Poids & Corps* sont Synonimes. Mais c'est une erreur. La pésanteur est une qualité accidentelle aux corps, laquelle a sa cause particulière. Il ne faut atacher au mot *Corps* que l'idée d'une étenduë impénétrable de telles ou telles dimensions.

III.

Sous une grandeur donnée, un corps peut contenir plus ou moins de Molécules élémentaires, parce que ces Molécules peuvent être plus ou moins contiguës les unes aux autres; ainsi il faut bien distinguer dans tous les corps la *Masse* du *Volume*.

La Masse d'un Corps est la quantité propre de Matière dont il est composé.

Le Volume est la grandeur extérieure qui frape nos sens, ou l'extension du corps suivant les trois dimensions longueur, largeur, & profondeur.

Le raport de la maſſe au volume, ou ce qui revient au même, la quantité de matière que contient un corps ſous un volume *donné*, eſt ce qui en forme la *Denſité*. On voit aſſez qu'un corps n'eſt apellé plus ou moins *denſe*, que par comparaiſon à un autre corps. Or pour faire une telle comparaiſon, il faut diviſer les maſſes de ces corps par le nombre des méſures de leurs volumes, c'eſt-à-dire, par le nombre de toiſes cubes, de pieds cubes, &c. qu'ils contiennent: les Quotients, qui ſont des maſſes compriſes ſous *l'unité de volume*, expriment les denſités. Sur ce principe, ſoient deux corps ou deux maſſes * A & B, & ſoient nommés G & g leurs volumes, D & d leurs denſités : on aura la proportion $D : d :: \frac{A}{G} : \frac{B}{g}$; donc auſſi $A : B :: GD : gd$, c'eſt-à-dire que les maſſes ſont en raiſon compoſée des volumes & des denſités.

IV.

Lorſqu'un corps reſte conſtamment dans le même endroit de l'*Eſpace*, il eſt en *Repos*; mais lorſqu'il paſſe d'un endroit dans un autre, il

* On remarquera ici en paſſant, que lorſque je me ſervirai du mot *Corps*, ſans ſpécifier s'il s'agit de la maſſe ou du volume, c'eſt toûjours de la maſſe que je parlerai.

eſt en *Mouvement*, & le mouvement eſt d'autant plus grand, que le paſſage dont il s'agit ſe fait en moins de *Tems*, ou que le corps a plus de viteſſe.

Pour ſe faire ici des idées juſtes & nettes du *Tems* & de l'*Eſpace*, on diſtinguera deux ſortes de tems & deux ſortes d'eſpaces ; le tems abſolu & le tems relatif, l'eſpace abſolu & l'eſpace relatif.

V.

Le tems abſolu, vrai & mathématique, ſans relation à rien d'extérieur, coule uniformément & s'apelle *Durée*. De même qu'en Géométrie on conſidére la ligne comme produite par le mouvement du *Point*, on peut conſidérer auſſi le tems abſolu comme produit par l'écoulement ſucceſſif & uniforme de l'*Inſtant*, qui en eſt une partie infiniment petite.

Le tems relatif, aparent & vulgaire eſt cette méſure ſenſible & externe d'une partie de durée quelconque, (égale ou inégale) priſe du mouvement : telles ſont les méſures d'*heures*, de *jours*, de *mois*, &c. dont on ſe ſert ordinairement à la place du tems vrai.

V I.

L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toûjours similaire & immobile, c'est-à-dire, qu'il est toûjours semblable à lui-même, & que ses parties conservent à l'infini leurs mêmes situations respectives en toutes sortes de sens.

L'espace relatif est cette mésure ou dimension mobile de l'espace absolu, laquelle tombe sous nos sens par sa relation aux corps, & que le vulgaire confond avec l'espace immobile. C'est ainsi, par éxemple, qu'un espace pris au dedans de la Terre ou dans le Ciel, est déterminé par la situation qu'il a à l'égard de la terre.

V I I.

Le *Lieu* est la partie de l'espace occupée par un corps, & selon que l'espace est absolu ou relatif, le lieu est absolu ou relatif.

Je dis que le lieu est une partie de l'espace & non pas simplement la situation du corps, ou la superficie qui l'entoure ; car les solides égaux ont toûjours des lieux égaux, quoique leurs superficies soient souvent inégales, à cause de la dissemblance de leurs formes : les situations, à parler éxactement, n'ont point de quantité ;

ce ſont plûtôt des afeſtions des lieux, que des lieux proprement dits.

V I I I.

De même qu'il y a deux ſortes de tems & d'eſpaces, il y a deux ſortes de repos, & deux ſortes de mouvemens, le repos abſolu & le repos relatif, le mouvement abſolu & le mouvement relatif.

Le repos abſolu d'un corps eſt la permanence de ce Corps dans un même endroit de l'eſpace abſolu, & le repos relatif eſt la permanence du corps dans un même endroit de l'eſpace relatif.

I X.

Le mouvement abſolu eſt le tranſport d'un corps d'un endroit de l'eſpace abſolu dans un autre endroit, & le mouvement relatif eſt le tranſport du corps d'un endroit de l'eſpace relatif dans un autre endroit.

Le mouvement abſolu & le mouvement relatif ont les mêmes propriétés, mais l'un peut éxiſter ſans l'autre. Par éxemple, ſuppoſons avec les Aſtronomes que la Terre ſe meuve d'Occident en Orient, & pour plus de facilité conſidérons ſon Orbite, ou plûtôt une portion de ſon Orbite, comme une ligne droite : il eſt

évident qu'un homme qui demeure dans le même endroit de la ſurface de la terre, n'a pas de mouvement relativement à la terre, mais qu'il eſt en mouvement dans l'eſpace abſolu, puiſqu'il eſt emporté avec tout le Globe terreſtre d'Occident en Orient. Au contraire ſi tandis que la terre marche d'Occident en Orient, un homme avance d'Orient en Occident avec la même viteſſe, il eſt clair que cet homme ſera en mouvement relativement à la terre, mais qu'il ſera en repos dans l'eſpace abſolu, puiſqu'il répondra toûjours aux mêmes points de cet eſpace.

Il eſt difficile de décider ſi un corps donné dans l'univers eſt en repos ou en mouvement, ſi ſon mouvement eſt abſolu ou relatif; car nous jugeons communement qu'un corps eſt en repos lorſqu'il conſerve la même ſituation par raport à diférens objets ſuppoſés immobiles, par éxemple, par raport aux Étoiles fixes; & qu'au contraire un corps eſt en mouvement lorſqu'il change de ſituation par raport à ces mêmes objets. Or il peut ſe faire que les objets que nous regardons comme immobiles ſoient réellement en mouvement. D'où

l'on voit que le repos & le mouvement ſont ſuſceptibles en eux mêmes de pluſieurs variétés qui peuvent nous échaper. Les mouvemens qui ſont l'objet de la méchanique ordinaire, s'éxécutent ſur la ſurface de la terre ; ainſi ils ne ſont le plus ſouvent, quant au fond, que des mouvemens relatifs. Mais on peut les conſidérer comme abſolus, en faiſant abſtraction du mouvement propre de la terre dans l'eſpace abſolu ; ou plûtôt en obſervant que ce mouvement affecte également tous les corps qui apartiennent au Globe terreſtre.

X.

Le tems & le mouvement ſe ſervent mutuellement de méſure. Nous avons déjà dit qu'au tems vrai qui ne tombe pas ſous nos ſens, on ſubſtituoit ordinairement ſa méſure ſenſible priſe du mouvement. Le mouvement fondamental qu'il eſt le plus d'uſage d'employer pour cela, eſt le cours aparent du Soleil. L'Intervalle entre le paſſage du ſoleil par une étoile fixe & ſon retour à la même étoile, forme l'*Année*, & l'intervalle entre le paſſage du ſoleil à un méridien & ſon retour au même méridien forme le *Jour*. Delà naiſſent les *Mois*, les *Heures*,

les *Minutes*, &c. Mais comme les Aſtronomes obſervent que le mouvement aparent du ſoleil, ou ſi l'on aime mieux, le mouvement réel de la terre, n'eſt pas parfaitement uniforme, & que les jours ſont inégaux entr'eux, ils corrigent cette inégalité par l'*Équation*, qui n'eſt autre choſe que la diférence entre le tems abſolu & le tems relatif. Par tous ces moyens on parvient à fixer des méſures ſuffiſamment éxactes du tems, & l'on s'en ſert pour eſtimer les durées des mouvemens que la Méchanique conſidére. Les mouvemens aparens du ſoleil ſont, pour ainſi dire, les termes de comparaiſon auſquels on raporte tous les autres mouvemens.

X I.

L'Agent qui imprime du mouvement à un corps, ou qui détruit celui que le corps peut avoir, s'apelle *Force* ou *Puiſſance*. Conſidéré comme éxiſtant encore dans l'Agent, l'éfet de la force ſe nomme *Action*, conſidéré comme reçû par le corps, l'éfet de la force ſe nomme *Impreſſion*.

X I I.

On diviſe en général la force, en *Force morte* & *en Force vive*.

Par la force morte, on entend celle qui sollicite au mouvement un corps retenu par quelque obſtacle fixe, & qui ne produit par conſéquent aucun mouvement actuel : telle eſt la péſanteur qui preſſe un corps poſé ſur une table horizontale. On apelle encore force morte, mais plus ordinairement *Preſſion*, une force qui ne peut produire un mouvement actuel, qu'après avoir agi pendant un tems fini : telle eſt chaque action inſtantanée & iſolée de la péſanteur ſur un corps qui tombe librement. Ceci s'éclaircira mieux dans la ſuite.

La force vive eſt celle qu'a un corps qui ſe meut actuellement. Elle peut être regardée comme la ſomme d'une infinité de preſſions accumulées. Il y a des Philoſophes qui comparent la force morte à une ligne, & la force vive à une ſurface.

XIII.

La Méchanique en général eſt la ſcience des forces apliquées aux corps.

Lorſque les diférentes forces appliquées à un corps, ou à un ſiſtême de corps, ſe font mutuellement équilibre, la partie de la Méchanique qui

traite de leurs raports, s'appelle *Méchanique ſtatique*. Quelques Auteurs apellent encore la Statique *la ſcience des forces mortes* ou des *Preſſions*. Les principes decette ſcience ſont expliqués avec clarté dans pluſieurs ouvrages, ſur-tout dans le Cours de M. Camus de l'Académie Royale des Sciences.

Mais lorſque de l'aplication des forces réſultent des mouvemens, ces mouvemens ſont l'objet de la Méchanique proprement dite; c'eſt de cette partie de la Méchanique, que je me propoſe de traiter ici.

XIV.

Je diviſerai cet Ouvrage en deux Livres. Dans le prémier je ſupoſerai que le mouvement eſt déjà produit, de quelque manière qu'il ait pû l'être, & je conſidérerai les propriétés qu'il a en lui-même. Dans le ſecond Livre, j'expoſerai les loix ſuivant leſquelles les corps ſe communiquent le mouvement en agiſſant & en réagiſſant les uns ſur les autres d'une manière quelconque. Cet ordre me paroît le plus ſimple & le plus naturel, pour paſſer des choſes les plus aiſées aux plus difficiles.

AXIOMES
OU LOIX DU
MOUVEMENT.

X V.

Axiome. **T**OUT *Corps est indiférent en lui-*
I. *même pour le repos & pour le mouvement, & doit par conséquent persévérer dans son état de repos ou de mouvement uniforme jusqu'à ce qu'une cause extérieure l'en retire.*

En éfet la Matière est un Être inanimé aussi incapable de se procurer par lui-même du mouvement, que de changer en aucune manière celui qu'il peut avoir d'ailleurs. Cette loi est confirmée par l'expérience. Les mouvemens des projectiles persévérent par eux-mêmes, & ne sont détruits que par la résistance de l'air qui les diminuë peu-à-peu, & par l'action de la pésanteur qui les ramêne & les atache à la terre. Une Toupie dont les parties se detour-

nent continuellement les unes les autres de la ligne droite par leur cohérence reciproque, ne cesse de tourner que parceque la résistance de l'air la retarde. Les Planettes & les Comêtes qui sont de plus grandes masses, & qui se meuvent dans des espaces moins résistans, conservent plus long-tems leurs mouvemens progressifs & circulaires, &c. En général, plus le nombre des obstacles contraires au mouvement d'un corps diminuë, plus le mouvement dure long-tems, ensorte que si la résistance des obstacles devenoit absolument nulle, le mouvement se perpetuëroit par lui-même à l'infini.

X V I.

Axiome II. Les changemens qui arrivent dans le mouvement d'un corps sont proportionels à la force motrice & se font dans la ligne droite suivant laquelle cette force a été imprimée.

La prémière partie de cet Axiome est évidente. La seconde ne l'est pas moins, puisque le corps étant indiférent à se mouvoir plûtôt d'un côte que de l'autre, il doit nécessairement obéir à la force qui le sollicite à suivre sa direction, soit que cette force ait été imprimée

en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu-à-peu & successivement. Le mouvement étant ainsi déterminé du même côté que la force génératrice, il sera ajoûté au mouvement que le corps est dejà supposé avoir, s'il conspire avec lui, ou en sera retranché, s'il lui est contraire, ou bien sera ajoûté ou retranché en partie, s'il lui est oblique; & de ces deux mouvemens il s'en formera un seul dont la détermination sera composée des deux prémières.

XVII.

AXIOME III. La réaction est toûjours égale & contraire à l'action.

Tout corps qui presse un autre corps en est en même tems pressé. Si on presse un pierre avec le doigt, le doigt est pressé en même tems par la pierre. Si un Cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il est également tiré par la pierre; car la corde, qui les joint & qui est tenduë des deux côtés, fait un éfort égal pour tirer la pierre vers le cheval, & le cheval vers la pierre; & cet éfort s'opose autant au mouvement de l'un, qu'il excite le mouvement de l'autre. Il en est de même de l'action

& de la réaction des corps qui se choquent ou qui se transmettent une partie de leurs mouvemens d'une manière quelconque, &c.

COROLLAIRES.

XVIII.

Corollaire 1. *Tout corps doit opposer à son changement d'état, soit de repos, soit de mouvement, une résistance toûjours proportionnelle à sa masse.*

Cette résistance s'appelle *force d'inertie*, du mot latin *inertia*, pour signifier que le corps est comme paresseux dans son état.

La force d'inertie est liée essentiellement à l'indiférence de la Matière pour le repos & pour le mouvement : car puisqu'un corps ne peut passer du repos au mouvement, ou du mouvement au repos, que par l'action d'une cause extérieure [Art. XV.], & que toute action supose une réaction égale & contraire[Art. XVII.]; il s'ensuit que le corps doit résister à son changement d'état. Or il n'y a pas de raison pour que

que cette réſiſtance exiſte plûtôt dans une molécule du corps, que dans l'autre; donc elle doit être commune à toutes les molécules; donc l'inertie totale eſt la ſomme de toutes les inerties particulières, & par conſéquent elle eſt proportionelle à la maſſe entière du corps.

Il y a des Philoſophes ſcholaſtiques qui diſent que la force d'inertie eſt un éfet de la péſanteur des corps; mais c'eſt une erreur groſſière. Les expériences les plus ſimples ſuffiſent pour s'en convaincre. Supoſons, par éxemple, qu'on meuve un corps ſur un plan horizontal parfaitement poli: il eſt évident que la péſanteur ne peut pas faire ſentir ſon éfet. Néanmoins on éprouve de la réſiſtance, & cette réſiſtance eſt toûjours éxactement proportionelle à la maſſe du corps. Veut-on une expérience encore plus déciſive? Supoſons un corps qui tombe librement par ſa péſanteur: ſi on le preſſe avec la main pour accélérer ſa chute, on éprouve encore de la réſiſtance. Or cette réſiſtance ne peut pas être atribuée à la péſanteur, puiſque l'éfort de la péſanteur s'ajoûte à celui de la main, loin de lui être contraire; donc la force d'inertie eſt une qualité particulière de la Matière,

laquelle eſt abſolument indépendante de la péſanteur.

X I X.

Corollaire 2. Un Corps pouſſé par deux forces
Fig. 1. *P & Q capables de lui faire parcourir chacune en particulier les côtés* AB, AC *d'un parallelogramme* ABDC *pendant un certain tems, parcourt par leurs actions réünies la Diagonale* AD *dans le même tems.*

Car puiſque la force P agit ſuivant AB parallele à CD, elle ne peut produire [Art. XVI.] qu'une viteſſe parallele à CD, & ne doit nullement s'opoſer à la viteſſe avec laquelle la force Q tend à faire aprocher le corps de CD. Par la même raiſon, la force Q ne peut mouvoir le corps que parallelement à BD, & ne doit pas s'opoſer à la viteſſe avec laquelle la force P tend à faire aprocher le corps de BD : ainſi puiſqu'en vertu de ſon indiférence au mouvement, le corps obéit néceſſairement aux deux forces, il s'enſuit qu'à la fin du tems il ne ſe trouvera ni en B, ni en C, mais en D qui eſt le point de concours des deux paralleles CD, BD aux directions des forces; donc il parcourra le diagonale AD dans le même tems

qu'il auroit parcouru séparément les cotés AB, AC.

Cette propoſition eſt également vraie pour les forces mortes & pour les forces vives.

On voit par là qu'à la place de deux forces repréſentées par les cotés contigus d'un parallelogramme conſtruit ſur leurs directions, on peut prendre une force unique repréſentée par la diagonale qui paſſe par l'angle que forment les directions des forces ; & réciproquement à la place d'une force ſimple repréſentée par une partie de ſa direction, on peut prendre deux forces repréſentées par les cotés contigus d'un parallelogramme qui auroit pour diagonale correſpondante la ligne priſe pour repréſenter la force dont il s'agit.

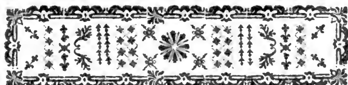
Telles ſont les loix fondamentales du mouvement. Les autres qui en dérivent ſeront dévelopées chacune à leur place.

AVERTISSEMENT.

IL ne ſera queſtion dans ce Traité que des Mouvemens uniformes ou uniformément accélérés ; & je ſupoſerai toûjours que ces mou-

vemens ne souffrent aucune altération de la part de l'air, ou se passent dans un milieu absolument vuide. Comme on ne peut pas aprofondir la Théorie des mouvemens curvilignes & variés suivant des loix quelconques, & celle des mouvemens retardés par la résistance des milieux, avec la seule Géométrie élémentaire, j'ai mieux aimé n'en faire aucune mention, que d'en donner des Notions superficielles & incomplettes. Les Lecteurs versés dans l'Analyse infinitesimale pourront consulter sur ces diférens objets les deux prémiers Livres des principes Mathématiques de Neuton, la Méchanique de M. Euler, la Dynamique de M. d'Alembert, plusieurs mémoires repandus dans les Ouvrages de MM. Bernoulli, & dans les Recueils des Académies des Sciences de Paris, de Péters-bourg, de Berlin, &c.





LIVRE PRÉMIER.

DU MOUVEMENT

CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME.



CHAPITRE I.

Du Mouvement uniforme.

X X.

LE Mouvement uniforme n'a pas besoin d'être défini : tout le monde conçoit qu'un tel mouvement est celui par lequel un corps se meut toûjours de la même manière, ou ce qui revient au même, parcourt en tems égaux des espaces égaux.

X X I.

L'Espace qu'un corps parcourt uniformément pendant un *tems donné*, est ce qu'on apelle sa vitesse. D'où il suit que pour avoir la vitesse du

corps, il faut regarder le tems total de ſon mouvement comme composé de meſures égales au *tems donné*, (ſoit qu'il contienne éxactement ou non ces meſures) ; enſuite diviſer l'eſpace total par le nombre des meſures du tems : le Quotient, qui eſt l'eſpace parcouru pendant l'unité du tems, exprime la viteſſe. Par éxemple, ſupoſons qu'un corps parcoure uniformément 400 toiſes en 20 minutes: ſi l'on prend la minute pour la meſure ou l'unité du tems, il faudra diviſer 400 toiſes par 20, & le quotient 20 toiſes, qui eſt l'eſpace parcouru en une minute, repréſente la viteſſe du corps; de ſorte que ſi l'on a un autre corps qui en une minute parcoure 40 toiſes, la viteſſe du prémier ſera la moitié de la viteſſe du ſecond.

Il eſt viſible que la viteſſe n'eſt pas une quantité abſoluë, mais relative à une autre viteſſe. Le raport des deux viteſſes eſt celui des eſpaces que les deux corps auſquels elles appartiennent, parcourent en tems égaux.

XXII.

La *quantité de mouvement* d'un corps doit s'eſtimer par le produit de la maſſe & de la viteſſe de ce corps.

Car 1°. le corps en vertu de son inertie, tend à rester dans l'état où il se trouve, avec un éfort proportionel à sa masse. [Art. XVIII].

2°. Il est d'autant plus dans l'état de mouvement, qu'il parcourt plus d'espace en moins de tems, ou qu'il a plus de vitesse. Voilà donc deux causes, la masse & la vitesse, qui concourent à augmenter la quantité de mouvement : Et comme la vitesse est commune à toutes les molécules du corps, il s'ensuit que la quantité totale de mouvement est comme le produit de la masse du corps par sa vitesse.

La quantité de mouvement est une quantité relative, de même que la vitesse. On peut la représenter par un espace, en supusant pour cela qu'elle est le produit de la vitesse (qui est l'espace parcouru pendant l'unité de tems) par le nombre des mésures de la masse (qui est un nombre abstrait). Cette manière de considérer la quantité de mouvement est, ce me semble, très-lumineuse & très-commode. Par éxemple, il est aisé de démontrer par là cette proposition si utile dans la Méchanique, que si deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre avec des quantités égales de mouvement, ils

doivent ſe faire mutuellement équilibre ; car les quantités de mouvemens de ces deux corps étant repréſentées par des eſpaces égaux (Hyp.), ils ſont dans le même cas que ſi étant égaux ils venoient ſe choquer l'un l'autre avec des viteſſes égales repréſentées par les eſpaces égaux qui expriment les quantités primitives de mouvemens : Or dans ce ſecond cas, il eſt clair que les deux corps doivent ſe faire mutuellement équilibre ; donc auſſi dans le prémier ils ſe feront équilibre.

XXIII.

Scholie 1. Il eſt à propos, pour fixer davantage les idées, de réduire ici en formules générales toute la théorie du mouvement uniforme que nous venons d'établir.

Soient donc deux corps M & *m* qui ſe meuvent uniformément, & ſoient repréſentés reſpectivement

Les forces motrices qui les animent par. . . . . F & *f*,
Les eſpaces qu'ils parcourent par... E & *e*,
Les tems de leurs mouvemens par... T & *t*,
Leurs viteſſes par . . . . V & *u*.

Cela posé, 1°. on aura [Art. XXI.] $V : u : \frac{E}{T} \cdot \frac{e}{t}$; d'où l'on tire la formule

$$(A)\ VTe = utE.$$

2°. Les forces motrices étant évidemment proportionelles aux quantités de mouvemens qui en sont les éfets, on aura $F : f :: MV : mu$; d'où l'on tire la formule

$$(B)\ Fmu = fMV.$$

3°. Multipliant membre par membre les deux formules (A) & (B), & divisant par la quantité commune Vu, on aura cette troisiéme formule

$$(C)\ FTme = ftME.$$

XXIV.

Scholie 2. Les trois formules (A), (B), (C) sont la source d'une infinité de Théorêmes particuliers. En voici quelques éxemples.

THÉORÉME I.

Si les vitesses sont égales, les espaces parcourus sont comme les tems.

Car (Hyp.) $V = u$: divisant les deux membres de la formule (A) par V & u, elle deviendra $Te = tE$; d'où l'on tire $E : e :: T : t$.

THÉORÉME II.

Si les masses sont en raison inverse des vitesses, les forces seront égales.

Car (Hyp.) M : m :: u : V ; donc M V= mu; divisant le prémier membre de la formule (B) par mu, & le second par MV, on aura F $=f$.

THÉORÉME III.

Lorsque les masses sont en raison réciproque des espaces, les forces sont en raison réciproque des tems.

Car (Hyp.) M : m :: e : E ; donc ME= me ; divisant le prémier membre de la formule (C) par me, & le second par ME, on aura F T $=f\,t$; donc F : f :: t : T.

THÉORÉME IV.

Si les masses sont égales, & que les quarrés des espaces soient comme les cubes des tems, les forces seront en raison réciproque des racines quarrées des espaces.

Car (Hyp.) M $=m$, & $T^2 : t^2$ $E^3 :: e^3$ ou T : t :: E $\sqrt{E}$: $e\sqrt{e}$; donc T $e\sqrt{e} = t$ E $\sqrt{E}$; divisant le premier membre de la formule (C)

par $m\,T\,e\sqrt{e}$, le ſecond par $M\,t\,E\sqrt{E}$, on trouvera $\frac{F}{\sqrt{e}} = \frac{f}{\sqrt{E}}$; ce qui donne $F\,f :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.
&c.

CHAPITRE II.

Des Mouvemens variés en général, & du Mouvement uniformément accéléré ou retardé en particulier.

XXV.

Lorſque le mouvement d'un corps augmente ou diminuë ſans ceſſe, on l'apelle *Mouvement accéléré* ou *retardé*, & en général *Mouvement varié*.

XXVI.

On a établi [Art. XV.] qu'abſtraction faite de tout obſtacle & de toute force étrangère, un corps une fois mis en mouvement continueroit ſans fin à ſe mouvoir uniformément. Ainſi le mouvement ne peut devenir varié que par l'intervention d'une force conſtante ou variable qui agiſſe ſans ceſſe ſur le mobile.

Cette force toûjours agiſſante s'apelle *Force accélératrice* ou *retardatrice*. Chaque dégré de

viteſſe qu'elle produit ou qu'elle détruit à chaque inſtant eſt infiniment petit, autrement à la fin d'un tems *fini* le mobile auroit une viteſſe *infinie*: ſupoſition, qui ne peut pas avoir lieu dans la nature. Par là on comprend la diſtinction qu'il faut mettre entre la force d'un corps qui ſe meut uniformément, & la force accélératrice ou retardatrice. La prémière eſt une force vive en vertu de laquelle le mobile a toûjours une viteſſe finie : la ſeconde eſt une force morte, ou comme on dit une *Preſſion*, dont chaque action iſolée ne peut produire ou détruire qu'une viteſſe infiniment petite. Ces deux forces ſont entr'elles comme le fini & l'infiniment petit, comme une ſurface & une ligne, &c. Nous avons ſans ceſſe ſous les yeux des éxemples de ces diférentes eſpéces de forces. Une Bille de Billard qui roule ſur le tapis eſt douée d'une force vive, & elle communique une force vive à une autre Bille qu'elle va choquer. La péſanteur, par raport aux corps qui tombent librement, eſt une force accélératrice ; par raport aux corps qu'on lance de bas en haut, la péſanteur eſt une force retardatrice, &c.

Pour éviter toute équivoque dans l'uſage du

mot *Force*, on pourroit apeller *Forces de percussion* ou d'*impulsion* les forces des corps qui se meuvent uniformément avec des vitesses finies, & conserver toûjours le nom de *Forces accélératrices* ou *retardatrices* pour les forces de *Pressions* dont la nature est d'agir par des dégrés insensibles, comme nous venons de l'expliquer.

XXVII.

La force accélératrice (il en est de même de la force retardatrice) est ou *absoluë* ou *simple*. La force accélératrice qui met en mouvement une masse finie proposée, s'apelle *Force accélératrice absoluë* : le raport de la force accéleratice absoluë à la masse, ou ce qui revient au même, la force acceleratrice qui meut l'*unité de masse*, s'apelle *Force accélératrice simple* ; d'où l'on voit que la force accélératrice absoluë est le produit de la force accélératrice simple par la masse du corps. Par éxemple, lorsqu'un corps tombe librement par sa pésanteur, le poids absolu de ce corps, ou la force qui pousse toute sa masse de haut en bas, est sa force accélératrice absoluë, & le poids particulier de chacune des molécules élémentaires égales qui le composent,

eſt ſa force accélératrice ſimple. Ordinairement on nomme *Péſanteur* ou *Gravité*, le poids particulier de chaque Molécule élémentaire, enſorte que le poids abſolu eſt le produit de la péſanteur ou de la gravité par la maſſe.

Cette diſtinction des forces accélératrices eſt admiſe de tous les Géométres. Lorſque pour abréger ils ſe ſervent de cette expreſſion *Force accélératrice* ſans ajoûter ni le mot *abſoluë*, ni le mot *ſimple*, ils entendent toûjours la force accélératrice ſimple.

XXVIII.

Comme il y a des forces accélératrices ſuivant une infinité de diférentes loix, il y a auſſi une infinité de diférentes eſpéces de mouvemens variés. La Théorie de ces mouvemens ne peut pas être traitée en général ſans le ſecours des calculs diférentiel & intégral, comme je l'ai déja remarqué ; mais les principes de la Géometrie élémentaire ſuffiſent pour les mouvemens *uniformément accélérés* ou *retardés*.

Le mouvement d'un corps eſt uniformément accéléré, lorſque la force accélératrice eſt toûjours conſtante, & qu'elle imprime parconſéquent, pendant chacun des inſtans égaux &

ſucceſſifs du tems, des dégrés égaux de viteſſe au mobile. Je vais éxaminer ici aſſez au long les propriétés de ces ſortes de mouvemens; & ce que j'en dirai s'apliquera, dans un ordre renverſé, aux mouvemens uniformément retardés.

XXIX.

Puiſqu'en vertu de ſon inertie le corps conſerve la viteſſe qu'il a aquiſe, & qu'en vertu de la force accélératrice conſtante qui le pourſuit ſans ceſſe, il aquiert pendant tous les inſtans égaux & ſucceſſifs du tems, des dégrès égaux de viteſſe, il s'enſuit que chaque viteſſe *finale* eſt proportionelle au tems écoulé depuis le commencement du mouvement: car chaque viteſſe finale n'eſt autre choſe que la ſomme des dégrés égaux de viteſſe aquis depuis le commencement du mouvement.

XXX.

Sur cette conſidération, ſi l'on repréſente le tems du mouvement par la droite AB, & qu'ayant diviſé ce tems en une infinité d'inſtans AD, DF, FH, &c. on ſupoſe que la viteſſe à la fin du prémier inſtant AD ſoit exprimée par la droite infiniment petite DE perpendiculaire à AB; qu'enſuite on tire par les *Fig. 2.*

points A & E l'Hypothenuſe AC du triangle reċtangle ABC, & qu'on mêne les autres ordonnées FG, HK, &c. BC : il eſt clair que les diférentes viteſſes du corps à la fin des tems AF, AH, &c. AB ſeront exprimées par les ordonnées FG, HK, &c. BC. De plus puiſqu'à chaque inſtant la viteſſe n'augmente que d'un dégré infiniment petit, ſi l'on conſidére les deux viteſſes quelconques LM, ON, correſpondantes l'une au commencement, l'autre à la fin d'un inſtant LO, il eſt évident que ces deux viteſſes pourront être regardées comme égales, & que le Trapeze LMNO pourra être cenſé égal au reċtangle LMRO. Or lorſque la viteſſe demeure la même, ou que le mouvement eſt uniforme, les eſpaces parcourus ſont entr'eux [Art. XXIII. Formule A], comme les viteſſes multipliées par les tems; donc le petit eſpace élémentaire parcouru pendant l'inſtant LO ſera proportionel à LM×LO, c'eſt-à-dire au reċtangle LMRO, ou au petit trapeze LMNO. On prouvera de même que tout autre eſpace élémentaire parcouru eſt proportionel au Trapeze élémentaire correſpondant. Donc la ſomme de tous les eſpaces élémentaires, ou l'eſpace total parcouru, eſt en raiſon de la ſomme

des Trapèzes élémentaires du triangle ABC ou de l'aire de ce triangle, c'eſt-à-dire, comme le produit du tems par la moitié de la viteſſe finale, ou comme le produit du tems par la viteſſe finale entière.

De là on peut poſer pour principe que *lorſque deux corps ſe meuvent avec des mouvemens uniformément accélérés, les eſpaces qu'ils parcourent ſont entr'eux comme les produits des viteſſes finales multipliées par les tems.*

XXXI.

La nature de toute force accélératrice, étant d'agir ſans ceſſe ſur le mobile, ou de lui imprimer, pour ainſi dire, ſucceſſivement une infinité de petits coups, il s'enſuit que le produit de la force accélératrice abſoluë conſtante par la durée de ſon aplication, eſt proportionel au produit de la maſſe du corps par ſa viteſſe finale; car l'éfet de la force accélératrice abſoluë conſtante répétée autant de fois qu'il y a d'inſtans dans le tems, eſt la quantité finale de mouvement; c'eſt-à-dire le produit de la maſſe par la viteſſe finale.

Ainſi on peut poſer cet autre principe que

lorſque deux corps ſe meuvent avec des mouvemens uniformément accélérés, les produits des forces accélératrices abſoluës par les durées de leurs aplications, ſont entr'eux comme les produits des maſſes par les viteſſes finales.

Nous allons réduire en formules, toute la Théorie du mouvement uniformément accéléré, comme nous avons fait ci-deſſus pour le mouvement uniforme.

XXXII.

SCHOLIE I. Soient deux corps M & *m* qui ſe meuvent avec des mouvemens uniformément accélérés, & ſoient repréſentés reſpectivement

les forces accélératrices abſoluës qui les animent par. . . . . . F & *f*,
Leurs viteſſes finales par. . . . V & *u*,
Les tems de leurs mouvemens par. . T & *t*,
Les eſpaces parcourus par. . . . E & *e*;

1°. On aura [Art XXX.] E : *e* :: VT : *ut*; d'où l'on tire la formule

$$(D) \quad VTe = utE.$$

2°. On aura [Art. XXXI.] FT : *ft* :: MV : *mu*; d'où l'on tire la formule

(E) $FTmu = ftMV$.

3°. Multipliant membre à membre les deux formules (D) & (E), & divisant tout par Vu, on aura la formule

(F) $FTTme = fttME$.

4°. Multipliant en croix les deux formules (D) & (E), & divisant tout par Tt, on aura la formule

(G) $FEmuu = feMVV$.

Les deux prémières formules ont déja été énoncées dans les articles XXX & XXXI. On peut énoncer ainsi les deux autres :

Les forces accélératrices absoluës multipliées par les quarrés des tems, sont comme les produits des masses par les espaces parcourus.

Les forces accélératrices absoluës multipliées par les espaces parcourus, sont comme les produits des masses par les quarrés des vitesses finales.

XXXIII.

SCHOLIE 2. Dans les formules (E), (F), (G), les lettres F & f représentent, comme nous l'avons dit expressément, les forces accélératrices *absoluës*. Soient F & f respectivement

les forces accélératrices ſimples : on aura [Art. XXVII.] $F = FM$, $f = fm$.

Subſtituant à la place de F & de f leurs valeurs, & diviſant chaque membre par M m, on aura ces trois autres formules qui donnent les relations des forces accélératrices ſimples,

$$(H) \quad FTu = ftV,$$

$$(K) \quad FTTe = fttE,$$

$$(L) \quad FEuu = feVV.$$

Toutes ces diférentes formules ſervent à déterminer les circonſtances d'un mouvement uniformément accéléré, lorſqu'on connoît celles d'un autre mouvement uniformément accéléré qu'on regarde, ſi je puis m'exprimer ainſi, comme l'échelle de comparaiſon. On en verra diférens uſages par la ſuite. Comme les mouvemens des graves qui tombent librement, ou qui gliſſent ſur des plans inclinés, ſont les plus ſimples & les plus ordinaires des mouvemens uniformément accélérés, il eſt à propos d'en traiter ici en particulier.

SECTION I.

Du Mouvement libre des Graves.

XXXIV.

TOut corps abandonné à lui-même defcend d'un mouvement accéléré & dirigé au centre, ou à-peu-près * au centre de la terre. La péfanteur eft une force toûjours préfente & toûjours conftante qui preffe les Graves, & qui en tems égaux accélére leur viteffe par des dégrés égaux. Cette force, quelle qu'en puiffe être la caufe, pénétre toute la maffe des corps: elle agit également fur toutes les molécules égales de Matière, foit au commencement, foit en un autre tems quelconque de la chûte. On a cherché vainement à expliquer ce méchanifme. Ce n'eft pas ici le lieu de raporter les différens fiftêmes des Philofophes fur ce fujet. Nous obferverons feulement que la péfanteur

* Je dis *ou à-peu-près au centre*, parceque la Terre n'étant pas une Sphere parfaite, mais un Spheroïde produit par la révolution d'une demie Ellipfe autour de fon petit Axe, la péfanteur qui eft toûjours dirigée perpendiculairement à la furface de ce Spheroïde ne tend pas partout à fon centre.

ne peut pas être produite par l'action d'une Matière subtile qui pousse les corps de haut en bâs; car il est évident que les coups de ce fluide diminueroient, à mesure que la vitesse du corps tombant augmenteroit, & que par conséquent le mouvement des graves ne seroit pas uniformément accéléré ; ce qui est contraire à l'expérience.

X X X V.

Non seulement le mouvement des graves est uniformément accéléré; mais dans le vuide tous les corps, quelques inégales que puissent être leurs masses, tombent également vite. Cette expérience démontre que la pésanteur agit également sur toutes les molécules égales de Matière, comme nous l'avons dit, & que les poids des corps sont toûjours éxactement proportionels à leurs masses : car à mesure que la masse à mouvoir augmente, le poids de cette masse (qui est sa force motrice) doit augmenter nécessairement en même raison, pour lui imprimer la même vitesse qu'un moindre poids imprime à une moindre masse.

Tout cela bien conçu, apliquons les formules des articles XXXII & XXXIII. aux mou-

vemens de deux corps qui tombent librement, & considérons qu'à cause que F & f représentent ici les poids absolus, ou les forces accélératrices absoluës, des deux corps proposés, on à $F : f :: M : m$, ou bien $F m = f M$. On trouvera ces trois formules qui comprennent toute la Théorie de la chûte des graves,

$$(M) \quad T u = t V,$$
$$(N) \quad TT e = tt E,$$
$$(O) \quad E u u = e V V.$$

La prémière nous aprend que *les vitesses finales de deux corps qui tombent (ou d'un même corps après diférens tems) sont comme les tems.*

La seconde que *les espaces parcourus sont comme les quarrés des tems.*

La troisiéme qui est une suite des deux autres, *que les espaces parcourus sont comme les quarrés des vitesses finales.*

XXXVI.

D'après la formule (N), il est aisé de conclure que lorsqu'on connoîtra l'espace qu'un grave parcourt pendant un certain tems, on connoîtra aussi l'espace qu'il parcourra pendant tout autre tems. Or on sait par l'expérience que

tout grave parcourt environ 15 pieds 1 pouce pendant la prémière feconde de fa chûte. Voici donc dans la table fuivante la fuite des efpaces parcourus pendant 2 fecondes, 3 fecondes, 4 fecondes, &c. jufqu'à une minute. Il fera aifé d'étendre plus loin cette table fi on le juge à propos.



TABLE I.

TEMS des chutes. Secondes.	ESPACES parcourus. Pieds	pou.	TEMS des chutes. Secondes.	ESPACES parcourus. Pieds	Pou.
0	0				
1	15	1	31	14495	1
2	60	4	32	15445	4
3	135	9	33	16425	9
4	241	4	34	17436	4
5	377	1	35	18477	1
6	543	0	36	19548	0
7	739	1	37	20649	1
8	965	4	38	21780	4
9	1221	9	39	22941	9
10	1508	4	40	24133	4
11	1825	1	41	25355	1
12	2172	0	42	26607	0
13	2549	1	43	27889	1
14	2956	4	44	29201	4
15	3393	9	45	30543	9
16	3861	4	46	31916	4
17	4359	1	47	33319	1
18	4887	0	48	34752	0
19	5445	1	49	36215	1
20	6033	4	50	37708	4
21	6651	9	51	39231	9
22	7300	4	52	40785	4
23	7979	1	53	42369	1
24	8688	0	54	43983	0
25	9427	1	55	45626	1
26	10196	4	56	47301	4
27	10995	9	57	49005	9
28	11825	4	58	50740	4
29	12685	1	59	52505	1
30	13575	0	60	54300	0

XXXVII.

Nous avons vû [Art XXX.] qu'en repré-
Fig. 2. ſentant le tems d'un mouvement uniformément accéléré par la hauteur AB d'un triangle rectangle ABC, & la viteſſe finale par la bâſe BC, l'eſpace parcouru eſt proportionel à l'aire de ce même triangle ABC. Or ſi le corps ſe mouvoit d'un mouvement uniforme pendant le même tems AB avec une viteſſe égale à BC, il eſt évident que l'eſpace qu'il parcourroit ſeroit proportionel à l'aire du rectangle BV double du triangle ABC, puiſqu'a chaque inſtant du tems répondroit toûjours une viteſſe égale à BC; par conſéquent ſi l'on double tous les eſpaces qu'on a déterminés dans la table précédente, on aura les eſpaces qu'un corps parcourroit uniformément avec une viteſſe égale à chaque viteſſe finale, pendant le même tems qu'il a employé à aquérir cette viteſſe finale en tombant. D'où l'on voit que diviſant ces eſpaces ainſi parcourus uniformément par le nombre de ſecondes que le corps a employées à aquérir chaque viteſſe finale en tombant, on aura les Eſpaces qu'un corps parcourroit uniformément en une ſeconde avec une viteſſe égale à cette même viteſſe finale. Ces derniers eſpaces ſont déterminés dans la Table ſuivante.

TABLE II.

Tems employés par un grave à aquérir chaque viteſſe	Eſpaces parcourus uniformément en une ſeconde en vertu de la viteſſe aquiſe.		Tems employés par un grave à aquérir chaque viteſſe.	Eſpaces parcourus uniformém. en une ſeconde en vertù de la viteſſe aquiſe.	
Secondes	Pied.	Pou.	Secondes.	Pieds.	Pou.
0	0	0			
1	30	2	31	935	2
2	60	4	32	965	4
3	90	6	33	995	6
4	120	8	34	1025	8
5	150	10	35	1055	10
6	181	0	36	1086	0
7	211	2	37	1116	2
8	241	4	38	1146	4
9	271	6	39	1176	6
10	301	8	40	1206	8
11	331	10	41	1236	10
12	362	0	42	1267	0
13	392	2	43	1297	2
14	422	4	44	1327	4
15	452	6	45	1357	6
16	482	8	46	1387	8
17	512	10	47	1417	10
18	543	0	48	1448	8
19	573	2	49	1478	2
20	603	4	50	1508	4
21	633	6	51	1538	6
22	663	8	52	1568	8
23	693	10	53	1598	10
24	724	0	54	1629	0
25	754	2	55	1659	2
26	784	4	56	1689	4
27	814	6	57	1719	6
28	844	8	58	1749	8
29	874	10	58	1779	10
30	905	0	60	1810	0

XXXVIII.

Scholie. Nos deux tables donnent non-seulement la relation entre les espaces parcourus par un corps grave, & les tems employés à parcourir ces espaces; mais elles servent encore à comparer au mouvement des graves tout autre mouvement uniformément accéléré. Elles nous seront trés-utiles à l'égard de ce dernier objet, dans le second livre. Pour éclaircir ceci d'avance, suposons qu'on veuille déterminer les espaces qu'un corps parcourt d'un mouvement uniformément accéléré en vertu d'une force accélératrice, qui ne soit que le quart de la pésanteur ordinaire : on voit par la formule (K) que prenant F pour représenter la force accélératrice proposée, f pour représenter la pésanteur, & faisant $T = t$, on aura $E : e :: F : f :: 1 : 4$; donc $E = \frac{e}{4}$; donc en divisant par 4 tous les espaces déterminés dans les deux tables précédentes, on aura les espaces parcourus avec le mouvement uniformément accéléré dont il s'agit.

SECTION II.

Des Mouvemens des graves qui glissent sur des plans inclinés.

XXXIX.

SOit un corps A qui descende le long d'un plan incliné BD. suposons que la verticale AN représente son poids ou sa pésanteur absoluë : sur AN comme diagonale soit construit le rectangle AMNO dont le coté AM est perpendiculaire & le coté AO parallele à BD. A la place de la pésanteur AN, on peut [Art. XIX.] prendre deux autres forces représentées par AM & par AO. Or la prémière est détruite par la résistance du plan incliné. Il ne reste donc que la seconde pour faire descendre le corps, & cette force qu'on apelle *la pésanteur relative*, est à la pésanteur absoluë comme AO est à AN, ou bien à cause des triangles semblables AON, BCD, comme BC est à BD, c'est-à-dire, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur. Donc si l'on nomme P le poids absolu du corps, on aura la pésan- Fig. 3

teur relative $= P \times \frac{BC}{BD}$.

On voit par là 1°. Que le mouvement d'un corps qui glisse le long d'un plan incliné est un mouvement uniformément accéléré, puisque la pésanteur relative est une force toûjours constante, en quelque endroit du plan que le corps se trouve. 2°. Que si l'on multiplie les espaces déterminés dans nos deux tables par $\frac{BC}{BD}$, c'est-à-dire par le raport de la hauteur du plan incliné à sa longueur, on aura les espaces parcourus durant le même tems le long du plan incliné BD.

X L.

Suposons maintenant qu'on veuille comparer entr'elles les circonstances des mouvemens de deux corps qui glissent sur deux plans diféremment inclinés.

Soient représentés respectivement
Les poids absolus des deux corps par P & p,
Leurs poids relatifs, c'est-à-dire les forces absoluës qui les poussent chacun parallelement à son plan incliné, par. . . . . . . F & f,
Leurs masses par. . . . . M & m,

Les longueurs des deux plans inclinés, ou les espaces parcourus, par E & e,
Les hauteurs des mêmes plans, par H & h,
Les tems des mouvemens, par. . . T & t,
Les vitesses finales des deux corps par V & u.

On aura par l'article précédent $F = \frac{PH}{E}$, $f = \frac{ph}{e}$. Mettons ces valeurs dans les formules générales (E), (F), (G) de l'article XXXII. nous trouverons

$$PHTmue = phtMVE,$$
$$PHTTmee = phttMEE,$$
$$PHmuu = phMVV.$$

mais [Art. XXXV.] $P : p :: M : m$, ou bien $Pm = pM$: par conséquent ces trois formules se simplifieront & deviendront

$$(P) \quad HTeu = htEV,$$
$$(Q) \quad HTTee = httEE,$$
$$(R) \quad Huu = hVV.$$

XLI.

Entre l'infinité des théorêmes qu'on peut déduire de ces formules, la formule (R) fournit celui-ci qui est général. Quelles que puissent être les longueurs des deux plans inclinés, les

viteſſes finales qu'auront les deux corps après les avoir parcourus, ſeront toûjours entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs des mêmes plans. Ainſi, par éxemple, ſi l'un des corps tombe verticalement, & que l'autre parcoure un plan incliné dont la hauteur ſoit égale à la hauteur verticale parcouruë par le prémier corps, & dont la longueur ſoit telle qu'on voudra, les deux corps auront la même viteſſe à la fin de leurs mouvemens. On comprend aſſez qu'il s'agit des viteſſes dans le ſens des eſpaces parcourus. Paſſons à d'autres aplications.

XLII.

Fig. 4. *EXEMPLE 1. Trouver le raport des tems employés à parcourir les cordes d'un cercle vertical, menées des extrêmités d'un diamêtre vertical.*

Soit BR le diamêtre vertical du cercle propoſé, & ſoient BK & BD deux cordes quelconques menées de l'extrêmité B de ce diamêtre; KP, QD les ordonnées correſpondantes. Il eſt clair qu'on peut regarder BK & BD comme deux plans inclinés dont BP & BQ ſont les hauteurs.

Supoſons

Supofons
$$\left\{\begin{array}{l} BK. \ldots = E \\ BP. \ldots = H \\ BD. \ldots = e \\ BQ. \ldots = h. \end{array}\right.$$

On aura, par la propriété du Cercle, $EE : ee :: H : h$; donc $EEh = eeH$; donc, en vertu de la formule (Q), $TT = tt$ & $T = t$; donc les tems employés à parcourir les cordes BK, BD sont égaux entr'eux.

On prouveroit de même que le tems employé à parcourir la corde quelconque NR menée de l'extrêmité inférieure du diamêtre, eſt égal au tems employé à parcourir toute autre corde B K ou B D. Ainſi on doit conclure que toutes les cordes d'un cercle vertical, tirées des extrêmités d'un diamêtre vertical ſont parcouruës en tems égaux. Je n'ai pas beſoin d'ajoûter que le diamêtre vertical eſt compté lui-même au nombre des cordes qui partent de ſes extrêmités.

XLIII.

Remarque. La même propriété du Cercle peut ſe démontrer directement par un autre principe qu'il eſt bon d'expoſer ici, parce qu'il

sert d'ailleurs de fondement à la détermination des *Mouvemens synchrones*, c'est-à-dire, des mouvemens qui se font en tems égaux.

Le principe dont il s'agit consiste en ceci, *Lorsque les forces motrices absoluës de deux corps sont entr'elles en raison composée des masses de ces corps, & des espaces qu'elles leur font parcourir, les tems des mouvemens sont égaux*. Dans les mouvemens uniformes cette proposition se démontre par la formule (C) de l'article XXIII; & dans les mouvemens uniformément accélérés, elle se démontre par la formule (F) de l'article XXXII. Elle est d'ailleurs évidente par elle-même; car par éxemple, si l'une des masses & l'espace qu'elle parcourt, sont l'un & l'autre respectivement doubles de la seconde masse & de l'espace qu'elle parcourt, aussi la prémière force motrice est-elle quadruple de la seconde. D'où il suit visiblement que les espaces doivent être parcourus en tems égaux.

Cela posé, soit un corps M qui parcoure la corde BK, tandis qu'un autre corps *m* parcoure le diamètre BR. Nommons P & *p* les poids absolus de ces corps, F & *f* les forces accélératri-

ces absoluës qui les poussent, l'un parallelement à BK, l'autre verticalement. En considérant la corde BK & le diamêtre BR comme partagés en un même nombre infini d'élémens, & les tems des mouvemens comme partagés en un nombre infini d'instans correspondans chacun à chacun des élémens des espaces BK, BR, on aura sans cesse, pendant les durées des deux mouvemens, $F = \frac{P \times BP}{BK}$, $f = p$; donc $F : f ::$

$\frac{P \times BP}{BK} : p :: P \times BP : p \times BK$. Or [Art. XXXV.]

$P : p :: M : m$; & par la propriété du cercle, $BP : BK :: BK : BR$; donc $F : f :: M \times BK : m \times BR$. Donc puisque chaque élément de BK est à chaque élément de BR, comme BK est à BR, (à cause que BK & BR sont censés divisés en un même nombre d'élémens), il s'ensuit que chaque élément de BK sera parcouru dans le même tems que chaque élément correspondant de BR, & que par conséquent les lignes entières BK, BR seront aussi parcouruës en tems égaux.

Il résulte de là que le diamêtre BR, & toutes les cordes qui partent de ses extrêmités sont

parcourus en tems égaux.

XLIV.

Fig. 5. EXEMPLE 2. *Trouver le raport des tems employés à parcourir les cordes BK, & BD menées du ſommet d'une parabole dont l'axe eſt vertical.*

Soit AB le paramêtre de la parabole, & ſoient menées à l'axe les ordonnées KP, DQ.

Supoſons
$$\left\{\begin{array}{ll} AB \ldots\ldots & = a \\ BK \ldots\ldots & = E \\ BP \ldots\ldots & = H \\ BD \ldots\ldots & = e \\ BQ \ldots\ldots & = h \end{array}\right.$$

On aura, par la propriéte de la parabole; $\overline{KP}^2 = aH$, $\overline{DQ}^2 = ah$; donc $EE = HH + aH$, $ee = hh + ah$; donc $EE : ee :: HH + aH : hh + ah$. Mais par la formule (Q), $EE : ee :: HTT : htt$; donc $HTT : htt :: HH + aH : hh + ah$; donc $TT : tt :: H + a : h + a$, & $T : t :: \sqrt{H+a} : \sqrt{h+a} :: \sqrt{AP} : \sqrt{AQ}$, c'eſt-à-dire que les tems employés à parcourir les cordes d'une parabole ſont comme les racines quarrées des ſommes des abſciſſes & du paramêtre.

XLV.

REMARQUE. La même choſe peut ſe trouver

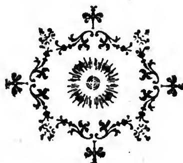
ainsi à l'aide de la propriété du cercle qu'on a démontrée dans l'article XLII ou XLIII.

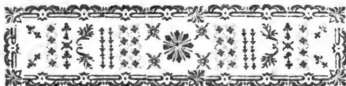
Soient toûjours AB le paramêtre de la parabole, KP, DQ les ordonnées menées des extrêmités K & D des cordes BK, BD. Par le sommet B, soit menée l'horizontale BM; ensuite sur AP, AQ, comme diamêtres, soient décrits les cercles AOP, AMQ qui rencontrent BM aux points O & M. Soient joints les points O & K, M & D par les droites OK, MD: les quadrilatères BPKO, BQDM seront des rectangles, comme on sait; & si dans ces rectangles on tire les diagonales OP, MQ, il est évident que ces diagonales seront parcouruës respectivement dans le même tems que les diagonales BK, BD, puisqu'elles leur sont égales, & qu'elles sont également inclinées à l'horizon. Or le tems employé à parcourir OP, est égal au tems employé à parcourir AP, & le tems employé à parcourir MQ est égal au tems employé à parcourir AQ; donc le tems employé à parcourir BK, est au tems employé à parcourir BD, comme le tems employé à parcourir AP, est au tems employé à parcourir AQ; mais le tems employé à parcourir AP est au tems employé à

parcourir AQ, [Art. XXXV. formule N]; comme $\sqrt{AP}$ eſt à $\sqrt{AQ}$; donc auſſi le tems employé à parcourir BK eſt au tems employé à parcourir BD; comme $\sqrt{AP}$ eſt à $\sqrt{AQ}$.

Je ne pouſſerai pas plus loin le détail de ces aplications.

Fin du Livre prémier.

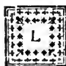




LIVRE SECOND.

DE LA COMMUNICATION *DES* MOUVEMEMS.

XLVI.

A détermination des mouvemens qui résultent de l'action & de la réaction des corps les uns sur les autres fait l'objet de la Science connuë parmi les Géomêtres sous le nom de *Dynamique*. Cette partie de la Méchanique, la plus dificile & la plus curieuse, pourroit seule fournir la matière de plusieurs volumes; mais outre que le Titre de cet Ouvrage m'interdit tous les problêmes de ce genre qui demandent la haute Géomêtrie, je me bornerai d'ailleurs aux recherches élémentaires qui me paroîtront les plus intéressantes. Mon but principal

eſt de déveloper très-clairement les principes fondamentaux de la Dynamique, & de mettre les lecteurs ſuffiſamment inſtruits du calcul, en état d'aller plus loin, ſoit par leurs propres méditations, ſoit par la lecture des Ouvrages écrits ſur ce ſujet, principalement de l'excellent Traité de M. d'Alembert.

CHAPITRE I.

Expoſition du principe ſondamental de la communication des mouvemens.

XLVII.

LOrſqu'un Corps en mouvement en va choquer un autre, il eſt certain qu'en vertu de l'impénétrabilité mutuelle de ces deux corps, le prémier doit agir ſur le ſecond qui eſt placé ſur ſa route; & comme il n'y a point d'action ſans une réaction égale & contraire [Art. XVII], il réſulte que le corps choquant doit perdre une partie de ſon mouvement & la communiquer au corps choqué. Si deux corps au lieu d'agir l'un ſur l'autre par un choc immédiat, ſont liés entr'eux ſoit par un fil, ſoit

par une verge, ou d'une autre manière quelconque, & qu'on imprime du mouvement à l'un d'eux, il eſt encore évident que celui-ci ne ſe mouvra pas de la même manière que s'il ètoit iſolé, mais qu'une partie du mouvement ſe tranſmettra à l'autre corps. La même choſe doit s'entendre du Syſtême d'un nombre quelconque de corps.

Pour déterminer en général la loi ſuivant laquelle pluſieurs corps ſe communiquent le mouvement en agiſſant & en réagiſſant les uns ſur les autres; je diſtingue deux cas: ou le Siſtême eſt entiérement libre, c'eſt-à-dire, n'éprouve la réſiſtance d'aucun obſtacle étranger, ou bien le Siſtême eſt gêné dans ſon mouvement par quelque obſtacle étranger, comme par éxemple, quand les corps ſont obligés de tourner ſur un point fixe, &c. Examinons ce qui doit arriver dans les deux cas.

XLVIII.

Tout corps libre en mouvement doit conſerver à l'infini ſa quantité abſoluë de mouvement ſans altération [Art. XV]. Or on peut conſidérer à cet égard un Siſtême de corps comme un corps unique; car que les parties d'un

corps se touchent immédiatement, ou qu'elles soient liées entr'elles par des fils, par des verges, &c. c'est une chose indiférente par raport à la mobilité du Siſtême. Par conſéquent la quantité abſoluë de mouvement imprimée à un Siſtême quelconque de corps doit toûjours ſubſiſter la même dans un même ſens.

Or puiſque d'un coté la quantité abſoluë de mouvement demeure toûjours la même en un même ſens, & que d'ailleurs les corps qui compoſent le ſiſtême ne peuvent pas ſe mouvoir ſans agir & ſans réagir les uns ſur les autres en vertu de leurs inerties particulières & des liens qui les uniſſent, comme nous l'avons déja remarqué, il s'enſuit que lorſqu'on imprime du mouvement à quelques uns des corps, ces corps ne prennent pas tout le mouvement, & qu'ils en tranſmettent une partie aux autres. Cette partie eſt *perduë* par les prémiers & *gagnée* par les derniers. Telle eſt donc la loi conſtante & générale, qui s'obſerve dans la répartition des mouvemens. Les mouvemens que perdent quelques uns des corps du ſiſtême en un certain ſens, ſont gagnés par les autres dans le même ſens, & il y a toûjours égalité entre les mouve-

mens perdûs & les mouvemens gagnés, comme entre deux forces qui se font mutuellement équilibre. Cette égalité a lieu en toutes sortes de sens, c'est-à-dire, que de quelque manière qu'on décompose les mouvemens perdûs & les mouvemens gagnés, aux mouvemens perdûs dans un sens répondent toûjours des mouvemens gagnés dans le même sens, qui leur sont égaux. Si, pour faciliter la solution d'un problême, ou pour d'autres raisons, on réduit tous les mouvemens perdus à un seul sens, & qu'on réduise les mouvemens gagnés en partie à ce même sens, en partie au sens directement oposé, la somme des mouvemens perdus sera égale à la diférence entre la somme des mouvemens gagnés dans le même sens, & la somme des mouvemens gagnés dans le sens directement oposé ; car alors cette diférence entre les mouvemens gagnés en particulier est la véritable quantité absoluë de mouvement gagné, qui répond à la quantité absoluë de mouvement perdu, &c.

X L I X.

Lorsque le sistême n'est pas libre, & qu'il éprouve l'empêchement de quelques obstacles, la quantité absoluë de mouvement dans un même

ſens, ne demeure pas toûjours la même, comme dans le prémier cas, parce que la réſiſtance des obſtacles en détruit une partie ; mais on peut toûjours ramener ce ſecond cas au prémier. Pour cela, on décompoſera tous les mouvemens particuliers des corps, chacun en deux autres eſpéces de mouvemens, dont les uns ſoient dirigés vers les obſtacles, & dont les autres ſoient libres. Alors on apliquera à ces derniers tout ce qu'on a dit dans l'Article précédent. Si le ſiſtême eſt obligé de tourner autour d'un point fixe, le moment du mouvement perdû autour de ce point, ſera égal au moment du mouvement gagné autour du même point, &c.

On pourroit encore ramener le ſecond cas au prémier, en conſidérant les obſtacles comme des corps libres dont les maſſes ſeroient infinies ; mais les calculs ſeroient d'ordinaire plus longs de cette façon.

Au reſte j'entens toûjours par *mouvement perdu*, *mouvement gagné*, la quantité même de mouvement, c'eſt-à-dire [Art. XXII.] le produit de la maſſe par la viteſſe perduë, le produit de la maſſe par la viteſſe gagnée. Ce ſont

ces quantités qui constituent les forces absoluës avec lesquelles les corps agissent & réagissent les uns sur les autres.

L.

Du principe d'égalité entre le mouvement perdu & le mouvement gagné, en découlent une infinité d'autres qu'il seroit trop long de détailler. Parmi ces conséquences ou loix secondaires, il en est une qui, sans être absolument générale, s'étend à une infinité de cas, & qu'on a employée avec le plus grand succès à la solution de diférens problêmes de Dynamique : c'est celle de *la conservation des forces vives.* Elle mérite que nous en donnions ici en peu de mots l'origine & l'explication, en faveur de quelques Lecteurs.

Plusieurs Philosophes ont prétendu que la force des corps en mouvement, ou ce que nous avons apellé d'après eux *la force vive*, est proportionelle au produit de la masse par le quarré de la vitesse, & non pas au simple produit de la masse par la vitesse, comme on l'avoit toûjours pensé. Les deux partis ont soutenu vivement chacun leur opinion, & les écrits se sont multipliés à l'infini de part & d'autre. On con-

vient aujourd'hui unanimement que la dispute n'étoit que dans les mots, & ne venoit que des diférens points de vûë sous lesquels on envisageoit la force. Cette discussion frivole n'a laissé d'autre vestige que le nom de conservation des forces vives, qu'elle a donné à la loi suivante dont nous voulions parler, & qui néanmoins n'en dépend en aucune manière, quant au fond.

Lorsque plusieurs corps agissent les uns sur les autres, soit en se tirant par des fils ou par des verges infléxibles, soit en se poussant (pourvûque dans ce dernier cas ils soient à ressort parfait) & que le sistême n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice : la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses est une quantité toûjours constante pendant le tems du mouvement. Mais si le sistême éprouve l'action de forces accélératrices, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses à chaque instant est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses initiales, plus à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses que ces masses auroient aquises depuis le commencement du mou-

vement, si chacune d'elles s'étoit muë librement sur la courbe qu'elle a décrite par son mouvement forcé.

CHAPITRE II.

Du Choc des corps.

L I.

JE suposerai que les corps sont ou parfaitement durs ou parfaitement élastiques. Ce n'est pas que les méthodes que je donnerai ne soient aplicables aussi aux cas intermédiaires; mais j'ai crû devoir m'en tenir ici aux cas extrêmes, pour fixer davantage les idées.

Un corps est parfaitement dur, lorsqu'il est d'une roideur infléxible, & qu'il ne s'aplatit aucunement par la compression.

Un corps parfaitement élastique au contraire est celui qui s'aplatit par la compression, & qui reprend ensuite sa prémiére figure lorsque cette compression vient à cesser.

Les loix du choc des corps élastiques se tireront de celles du choc des corps durs.

LII.

Remarque. Il eſt indiférent, quant à l'éfet de la percuſſion, que les corps ſe meuvent ſur un plan horizontal ou ſur tout autre plan; car la force de la percuſſion étant infinie par raport à chaque action iſolée & inſtantanée de la péſanteur [Art. XXVI], il eſt clair que les éfets réſultans du choc mutuel des corps ſont les mêmes, ſoit que la péſanteur agiſſe ou non. Tous les changemens que la péſanteur pourroit produire dans les viteſſes des corps ſeroient ou antérieurs ou poſtérieurs à ceux qui ſont produits par la percuſſion. Néanmoins pour que l'eſprit ne ſoit pas diſtrait de l'objet que nous devons conſidérer ici, je ſupoſerai que les corps ſe meuvent ſur un plan horizontal parfaitement poli qui détruit par conſéquent l'éfet de la péſanteur. De plus je ſupoſerai que les corps ſont ſphériques & homogénes; car il n'eſt queſtion dans ce Chapitre que du ſimple mouvement progreſſif du centre de gravité, & nullement des mouvemens de rotation autour de ce point.



SECTION

SECTION I.

Du choc direct des Corps.

LIII.

PROBLEME I.

LE Corps dur A allant choquer le Corps dur B qui fuit directement devant lui avec une moindre vitesse : trouver la vitesse des deux corps après le choc. Fig. 6.

SOLUTION.

1°. Il est évident que le corps A ayant atteint le corps B le poussera jusqu'à ce qu'ils ayent tous deux la même vitesse. Alors l'action dont il s'agit cessera entiérement, & les deux corps continueront à marcher de compagnie avec la même vitesse, comme s'ils ne faisoient qu'une seule & même masse, puisqu'il n'y a point de ressort qui puisse les obliger à se séparer.

2°. La quantité de mouvement que le corps A perd en agissant sur le corps B, est égale à la quantité de mouvement que ce dernier gagne en réagissant sur A [Art. XLVIII.]. Or nommant V la vitesse de A avant le choc, *u*

celle de B auſſi avant le choc, x la viteſſe commune des deux corps après le choc, il eſt viſible qu'en vertu du choc la viteſſe perduë par A eſt $V-u$, & que la viteſſe gagnée par B eſt $x-u$; ainſi on aura

$$A(V-x)=B(x-u):$$

D'où l'on tire $x=\frac{AV+Bu}{A+B}$ viteſſe commune des deux corps après le choc. Cette viteſſe, comme on voit, eſt égale à la ſomme des mouvemens des deux corps avant le choc diviſée par la ſomme des mèmes corps. *C. Q. F. T.*

L I V.

Corollaire. Il ſuit delà que la viteſſe perduë par le corps A, c'eſt-à-dire $V-x=V-(\frac{AV+Bu}{A+B})=\frac{B(V-u)}{A+B}$, & que la viteſſe gagnée par le corps B, c'eſt-à-dire $x-u=\frac{AV+Bu}{A+B}-u=\frac{A(V-u)}{A+B}$. Ainſi la viteſſe perduë par le corps A eſt égale au produit du corps B par la diférence des viteſſes avant le choc, diviſé par la ſomme des corps, & la viteſſe gagnée par le corps B eſt égale au produit du

corps A par la diférence des viteſſes avant le choc, diviſé par la ſomme des corps.

L V.

Construction. Soient priſes les droites AD, BD proportionelles aux viteſſes des deux corps avant le choc, & ſoit C le centre de gravité des deux corps ſupoſés placés en A & B reſpectivement : la partie CD repréſentera leur viteſſe commune après le choc, & parconſéquent AC ſera la viteſſe perduë par le corps A en vertu du choc, & CB ſera la viteſſe gagnée par le corps B.

Car on a, par la propriété du centre de gravité, $CB = \frac{A \times AB}{A+B} = \frac{A\,(V-u)}{A+B}$; donc $CD = CB + BD = \frac{A\,(V-u)}{A+B} + u = \frac{AV+Bu}{A+B}$.

L V I.

PROBLEME. II.

Supoſons maintenant que les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre : on demande leur viteſſe après le choc. Fig. 7.

SOLUTION

Il eſt clair que celui des deux corps A & B,

qui a la plus grande quantité de mouvement, (& que j'apelle le corps choquant) forcera l'autre à rebrousser chemin, & qu'après le choc ils marcheront de compagnie avec la même vitesse, comme s'ils ne faisoient qu'une seule & même masse. Soit A le corps choquant, & soient nommées V & u respectivement les vitesses de A & de B avant le choc. On pourroit déterminer la vitesse commune de ces deux corps après le choc, en faisant (suivant les régles de l'Analyse) u négative dans l'expression de x qu'on a trouvée dans l'article LIII ; mais voici la solution directe du problême.

La quantité de mouvement que le corps choquant A perd est toûjours égale à la quantité de mouvement que le corps choqué B gagne. Or nommant x la vitesse commune des deux corps après le choc, dans le sens de V, il est visible que $V-x$ est la vitesse perduë par le corps A. Il n'est pas moins évident que $u+x$ est la vitesse gagnée par le corps B dans le sens de V; Car 1°. Ce corps doit gagner dans le sens de V une vitesse u qui détruise la vitesse contraire u avec laquelle il vient à la rencontre de A. 2°. Il gagne encore dans le même sens la vi-

teſſe x ; ainſi, eu égard à tout, il gagne la viteſſe $u+x$. On aura donc

$$A(V-x)=B(u+x);$$

Ce qui donne $x=\frac{AV-Bu}{A+B}$, c'eſt-à-dire que la viteſſe commune des deux corps après le choc eſt égale à la diférence des mouvemens avant le choc, diviſée par la ſomme des corps. *C. Q. F. T.*

L V I I.

Corollaire. Donc la viteſſe perduë par A, c'eſt-à-dire $V-x=V-\left(\frac{AV-Bu}{A+B}\right)=\frac{B(V+u)}{A+B}$, & la viteſſe gagnée par B, ou $u+x=\frac{AV-Bu}{A+B}+u=\frac{A(V+u)}{A+B}$.

L V I I I.

Construction. Soient priſes les droites AD, BD proportionelles aux viteſſes des deux mobiles (le point D tombant ici entre les points A & B), & ſoit C le centre de gravité des deux corps ſupoſés placés en A & B. Alors CD, AC, CB exprimeront reſpectivement la viteſſe

commune des deux corps après le choc, la viteſſe perduë par le corps A, & la viteſſe gagnée par le corps B. La démonſtration en eſt évidente.

L I X.

THÉOREME FONDAMENTAL

Pour le choc des corps élaſtiques.

Dans le choc de deux corps élaſtiques, qui vont d'un même coté, ou qui viennent à la rencontre l'un de l'autre, la viteſſe que perd le corps choquant eſt double de celle qu'il auroit perduë s'il n'y avoit point eu de reſſorts; & la viteſſe que gagne le corps choqué, dans le ſens du corps choquant, eſt double de celle qu'il auroit gagnée, s'il n'y avoit point eu de reſſorts.

J'apelle, dans le prémier cas, *corps choquant* celui qui a la plus grande viteſſe, & qui pourſuit l'autre; *corps choqué* celui qui a la plus petite viteſſe & qui marche le prémier; dans le ſecond cas, *Corps choquant* celui qui a la plus grande quantité de mouvement, *corps choqué* celui qui a la plus petite quantité de mouvement.

DÉMONSTRATION.

Lorſque le corps choquant a atteint le corps choqué, il le pouſſe, & les reſſorts ſe compri-

ment, jusqu'à ce que les deux corps ayent la même viteſſe dans le ſens du corps choquant. Alors l'action & la réaction des corps ceſſent, & les reſſorts ſe débandent avec la même force qu'ils ont été comprimés. Voila donc deux cauſes parfaitement égales, la compreſſion & la reſtitution des reſſorts, leſquelles doivent parconſéquent produire, chacune en particulier, des éfets égaux ſur chacun des deux corps reſpectivement.

Or 1°. La force avec laquelle le corps choquant frape le corps choqué (& comprime les reſſorts) fait perdre au corps choquant une certaine viteſſe, comme on l'a vû : de plus la reſtitution des reſſorts eſt encore contraire à la direction primitive de ce corps, puiſque les reſſorts ayant été bandés de gauche à droite & de droite à gauche par l'action & la réaction des deux corps, ils ſe débandent de droite à gauche & de gauche à droite, lorſqu'ils ſont une fois libres. Par conſéquent le corps choquant doit perdre une viteſſe double de celle qu'il auroit perduë, s'il n'avoit fait que choquer l'autre corps, & qu'il n'y eût point eu de reſſorts.

2°. Le corps choqué doit en vertu du choc gagner une certaine viteſſe dans le ſens du corps

choquant: de plus la reſtitution des reſſorts agit par raport à ce corps dans le ſens de la direction primitive du corps choquant; par conſéquent le corps choqué doit gagner dans le ſens du corps choquant une viteſſe double de celle qu'il auroit gagnée, s'il n'y eût point eu de reſſorts. *C. Q. F. D.*

On remarquera en paſſant que l'éfet du choc eſt le même, ſoit que les deux corps ſoient élaſtiques, ſoit que l'un étant élaſtique, l'autre ſoit dur. Mais pour plus de ſimplicité & de briéveté dans le diſcours, je les ſupoſe toûjours tous deux élaſtiques.

L X.

PROBLEME III.

Fig. 6. *Le corps élaſtique A allant choquer le corps élaſtique B qui fuit devant lui, déterminer les viteſſes des deux corps après le choc.*

SOLUTION.

Soient nommées reſpectivement V & u les viteſſes des deux corps avant le choc, y & z leurs viteſſes après le choc. Si ces corps étoient ſans reſſorts, la viteſſe perduë par A en vertu du choc ſeroit $\frac{B(V-u)}{A+B}$, & la viteſſe gagnée

par B feroit $\frac{A(V-u)}{A+B}$ [Art. LIV.]; donc, en vertu de l'article précédent, la viteffe perduë par A eft ici $\frac{2B(V-u)}{A+B}$, & la viteffe gagnée par B eft $\frac{2A(V-u)}{A+B}$: or la viteffe de A après le choc eft évidemment celle qu'il avoit avant le choc, moins celle qu'il a perduë par le choc ; & la viteffe de B après le choc eft celle qu'il avoit avant le choc, plus celle qu'il a gagnée par le choc. Par confequent on aura

$$y = V - \frac{2B(V-u)}{A+B} = \frac{AV-BV+2Bu}{A+B},$$

$$z = u + \frac{2A(V-u)}{A+B} = \frac{2AV-Au+Bu}{A+B}.$$

C. Q. F. T.

L X I.

CONSTRUCTION. Qu'on prenne AD & BD pour repréfenter les viteffes des deux corps avant le choc, & foit C le centre de gravité de ces corps fupofés placés en A & B; qu'on faffe CE égale & contraire à CD : les viteffes de A & de B feront exprimées refpectivement par EA & par EB.

Car s'il n'y avoit point de ressorts, CD seroit la vitesse commune des deux corps après le choc, AC la vitesse perduë par le corps A, CB la vitesse gagnée par le corps B [Art. LV.]; donc puisque les ressorts font encore perdre à A une partie AC de vitesse, & gagner à B une partie CB de vitesse, il est clair qu'après le choc la vitesse de A sera EA, & que la vitesse de B sera EB.

On voit par l'expression de la vitesse de A que si le point E tomboit entre le point A & le point C, la valeur de EA seroit négative, puisqu'il faut toûjours retrancher AC de CD pour avoir la vitesse du corps A après le choc; d'où il résulteroit que ce corps, au lieu de continuer de marcher en avant, rebrousseroit chemin en arrière.

LXII.

PROBLEME IV.

Fig. 7. *On supose maintenant que les deux corps élastiques A & B viennent à la rencontre l'un de l'autre, & on demande leurs vitesses après le choc.*

SOLUTION.

Soient V & *u* les vitesses de A & de B avant

le choc. Supoſons $AV > Bu$, & nommons y & z les viteſſes de A & de B après le choc, dans le ſens de V. On pourroit trouver les valeurs de y & z, en faiſant u négative dans les formules de l'Article LX; mais il eſt à propos de les chercher directement.

Si les deux corps étoient ſans reſſorts, la viteſſe perduë par A feroit $\frac{B(V+u)}{A+B}$, & la viteſſe gagnée par B feroit $\frac{A(V+u)}{A+B}$ [Art. LVII.]; donc, à cauſe des reſſorts, la viteſſe perduë par A ſera $\frac{2B(V+u)}{A+B}$, & la viteſſe gagnée par B ſera $\frac{2A(V+u)}{A+B}$ [Art. LIX.]; Or la viteſſe de A après le choc eſt évidemment celle qu'il avoit avant le choc, moins celle qu'il a perduë par le choc, & la viteſſe de B après le choc, dans le ſens de V, eſt celle qu'il a gagnée dans le même ſens, moins la viteſſe u qu'il avoit en ſens contraire; par conſéquent on aura

$$y = V - \frac{2B(V+u)}{A+B} = \frac{AV-BV-2Bu}{A+B},$$

$$z = \frac{2A(V+u)}{A+B} - u = \frac{2AV+Au-Bu}{A+B}. \textit{C. Q. F. T.}$$

L X I I I.

Construction. Ayant divisé la droite AB en deux parties AD, BD proportionelles aux vitesses des deux corps A & B avant le choc, & ayant déterminé le centre de gravité C de ces deux mêmes corps supolés placés en A & B, on fera CE=CD : alors la vitesse de A après le choc sera exprimée par EA, & celle de B par EB.

Cette construction se démontre de la même manière que celle de l'article LXI, & on voit pareillement que si le point E tombe entre les points A & B, le corps A, au lieu de continuer a marcher dans le sens AB après le choc, rébroussera chemin dans le sens oposé. A l'égard du corps B, il marchera toûjours après le choc dans le sens AB, parce que nous suposons que ce corps a une moindre quantité de mouvement que le corps A.

L X I V.

Scholie. I. Les formules que nous venons de trouver pour le choc des corps tant durs qu'élastiques sont susceptibles d'une infinité d'aplications particulières, suivant les relations qu'on supofera, soit entre les masses des corps, soit en-

tre leurs viteſſes, ſoit entre leurs forces ou quantités de mouvemens, &c. Comme nous avons donné diférens éxemples de ces ſortes d'aplications [Liv. I. Cap. I.] en traitant du mouvement uniforme en général, il eſt inutile de ſe jetter ici dans des détails qui nous meneroient trop loin, & qui d'ailleurs n'ont aucune dificulté.

L X V.

Scholie. 2. Je finirai cette théorie du choc direct, en démontrant une loi générale qui s'obſerve conſtamment dans le choc des corps élaſtiques (& non dans le choc des corps durs) ; c'eſt la loi de la conſervation des forces vives dont il a été parlé Art. L.

Soit que les deux corps élaſtiques A & B aillent dans le même ſens avant le choc, ſoit qu'ils viennent à la rencontre l'un de l'autre, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes après le choc ſera toûjours égale à la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes avant le choc.

Cela peut ſe démontrer aiſément par le calcul ; car 1°. Lorſque les corps vont d'un même coté avant le choc, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes après le choc

eſt [Art. LX.],

$$A\left[\frac{AV-BV+2Bu}{A+B}\right]^2+B\left[\frac{2AV-Au+Bu}{A+B}\right]^2,$$

quantité qui devient, après toutes les réductions, $AVV+Buu$ ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes avant le choc. 2°. Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes après le choc eſt [Art. LXII.],

$$A\left[\frac{AV-BV-2Bu}{A+B}\right]^2+B\left[\frac{2AV+Au-Bu}{A+B}\right]^2$$

expreſſion qui ſe réduit pareillement à $AVV+Buu$.

Mais il y a des Lecteurs qui préféreront peut-être la démonſtration ſuivante, tirée des conſtructions que nous avons données dans les articles LXI. & LXIII.

Fig. 6. & 7. La viteſſe de A après le choc eſt EA, & celle de B eſt EB. Or $EA=ED-AD=2CD-AD$, & $EB=ED\mp{}^{*}BD=2CD\mp BD$; donc

* Le ſigne ſupérieur eſt pour la Figure 6, & l'inférieur pour la Figure 7.

$A \times \overline{EA}^2 = A \times 4\overline{CD}^2 + A \times \overline{AD}^2 - A \times 4\, AD \times CD$,

& $B \times \overline{EB}^2 = B \times 4\,\overline{CD}^2 + B \times \overline{BD}^2 \mp$ $B \times 4BD \times CD$; Par conféquent on aura

$$\left.\begin{matrix} A \times \overline{EA}^2 \\ + B \times \overline{EB}^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A \times \overline{AD}^2 + B \times \overline{BD}^2 + \\ A \times CD \times 4CD - A \times AD \times 4CD + \\ B \times 4CD \times CD \mp B \times BD \times 4CD. \end{matrix}\right.$$

Or en confidérant les momens des deux corps A & B fupofés placés en A & B, & celui du centre de gravité C de leur fiftême, relativement au point D, on a *

$$A \times CD + B \times CD = A \times AD \pm B \times BD$$

ou bien

$$A \times CD + B \times CD - A \times AD \mp B \times BD = 0,$$

& par conféquent auffi

$$A \times CD \times 4CD + B \times CD \times 4CD - A \times AD \times 4CD$$
$$\mp B \times BD \times 4CD = 0.$$

Donc on aura fimplement

$$A \times \overline{EA}^2 + B \times \overline{EB}^2 = A \times \overline{AD}^2 + B \times \overline{BD}^2. \; C. \; Q. \; F. \; D.$$

* Voyez la Statique de M. Camus. Tom. I. N°. 64.

SECTION II.

Du Choc indirect des corps.

LXVI.

LEMME.

Fig. 8. *Si un Corps dur A va choquer obliquement un corps dur B en repos, je dis jusqu'après le choc la vitesse du corps A sera à la vitesse du corps B, comme le sinus total est au cosinus de l'angle que feront entr'elles les directions des deux vitesses.*

DÉMONSTRATION.

Soit HAF la direction du corps A avant le choc. Il est clair que la percussion se fait à l'instant que la distance AB des centres A & B des deux corps proposés, est égale à la somme des rayons des mêmes corps que nous regardons toûjours comme des Sphères. On voit encore que AB sera la direction du corps B après le choc. Soit AE la direction du corps A aussi après le choc, & suposons que, pendant la durée instantanée de la percussion, les deux corps A & B parcourent les espaces infiniment petits

petits A*a*, B*b*. Soit tirée la droite ab : on aura $ab = AB$, puisque les deux corps se touchent en parcourant A*a*, B*b*. Du point b comme centre soit décrit, avec le rayon bA, l'arc infiniment petit A*m*, entre les cotés bA, bam de l'angle infiniment petit Abm. En retranchant membre à membre l'équation $BA = ba$ de l'équation $bA = bm$, on aura $Bb = am$. Cela posé, le petit triangle amA, qu'on peut considérer comme un triangle rectiligne rectangle en m, donne cette proportion $Aa : am$ :: Sin. Tot. : Sin. aAm ou bien (à cause que l'angle aAm est le complement de l'angle BAE), $Aa : Bb$ :: Sin. Tot. : Cos. BAE. Mais A*a* & B*b* sont les vitesses des deux corps à l'instant où finit le choc, & parconséquent aussi leurs vitesses après le choc. Ainsi la vitesse du corps A après le choc est à la vitesse du corps B comme le sinus total est au cosinus de l'angle que font entr'elles les directions des deux vitesses. *C. Q. F. D.*

LXVII.

PROBLEME. V.

Le corps dur A allant choquer obliquement le corps dur B en repos, trouver les vitesses de ces deux corps après le choc. Fig. 91

SOLUTION.

Supoſons qu'à l'inſtant du choc on joigne les centres A & B des deux corps par la droite AB; cette ligne ſera la direction du corps B aprés le choc. Soient AF la viteſſe du corps A avant le choc, AE ſa viteſſe après le choc. Cette dernière viteſſe eſt inconnuë, & ſa direction fait avec AF un angle EAF auſſi inconnu. Soient joints les points F & E, & ſoit achevé le parallelogramme AHFE. Il eſt évident que AH * ou FE repréſentera la viteſſe perduë par le corps A en vertu du choc. Soit décompoſée AH en deux autres viteſſes AL, AG, l'une dirigée ſuivant AF, l'autre perpendiculaire à AF. Qu'on prenne ſur AB la partie AM pour repréſenter la viteſſe du corps B, & ſoit decompoſée cette viteſſe en deux autres AN, AO l'une dirigée ſuivant AF, l'autre perpendiculaire à AF.

Cela poſé, puiſqu'il y a toûjours égalité entre le mouvement perdu dans un ſens, & le mouvement gagné dans le même ſens [Art. XLVIII.], on aura ces deux équations

$$(A) \qquad A \times AL = B \times AN,$$
$$(B) \qquad A \times AG = B \times AO.$$

* La direction de la viteſſe perduë AH doit tomber ſur AB, comme cela ſaute aux yeux, & comme le calcul le montrera dans la ſuite.

Supofons
- Le Sinus total . . . . $= 1$,
- L'angle BAF, c'eſt-à-dire l'arc décrit du rayon 1, qui eſt la meſure de cet angle. $= a$;
- L'angle FAE, ou l'arc qui en eſt la meſure, ... $= z$;
- AF . . . . $= V$,
- AE . . . . $= x$.

Les deux quantités x & z ſont inconnuës, les autres ſont connuës.

Du point E ſoit abaiſſée EK perpendiculaire ſur AF ; on aura EK ou AG $=$ AE $\times$ ſin. FAE $= x$ ſin. z, AK $=$ AE $\times$ coſ. FAE $= x$ coſ. z, KF ou AL $=$ A F $-$ AK $=$ V $- x$ coſ. z.

L'Angle BAE étant égal à la ſomme des deux angles BAF, FAE, on aura par les régles de la Trigonomêtrie,

Coſ. B A E $=$ coſ. a. coſ. $z -$ ſin. a. ſin. z ; mais [Art. LXVI.] AM $=$ AE $\times$ coſ. BAE ; donc

A M $= x$. (coſ. a. coſ. $z -$ ſin. a. ſin. z).

Enfin on a, comme il eſt évident, A N $=$ AM $\times$ coſ. BAF, MN ou AO $=$ AM $\times$ ſin. BAF ; donc

AN $= x$ coſ. a. (coſ. a. coſ. $z -$ ſin. a. ſin. z) ;

$AO = x$ fin. a. (cof. a. cof. z – fin. a. fin. z).

Par conféquent les deux équations (A) & (B) fe traduiront ainfi

(C) $AV - Ax$ cof. $z = Bx$. cof. a. (cof. a. cof. z – fin. a. fin. z)

(D) Ax fin. $z = Bx$ fin. a. (cof. a. cof. z – fin. a. fin. z).

L'équation (D) donne

$(A + B(\text{fin. } a.)^2)$ fin. $z = B$ fin. a. cof. a. cof. z,

& comme cof. $z = \sqrt{1 - (\text{fin. } z.)^2}$, on aura, en mettant cette valeur de cof. z, & dégageant fin. z,

$$\text{fin.} z = \frac{B \text{ fin. } a. \text{ cof. } a.}{\sqrt{(A+B(\text{fin.} a.)^2)^2 + (B \text{ fin. } a. \text{ cof. } a.)^2}};$$

donc

$$\text{cof.} z = \frac{A+B(\text{fin. } a)^2}{\sqrt{(A+B(\text{fin.} a.)^2)^2 + (B \text{ fin.} a. \text{cof.} a.)^2}}$$

Comparant enfemble les deux équations (C) & (D), on trouvera

$$x = \frac{V \text{ fin. } a}{\text{fin. } a. \text{ cof. } z + \text{cof. } a. \text{ fin. } z} =$$

$$\frac{V \text{ fin. } a \sqrt{(A+B(\text{fin. } a.)^2)^2 + (B \text{ fin. } a. \text{ cof. } a)^2}}{\text{fin. } a. (A + B(\text{fin. } a.)^2) + \text{cof. } a. (B \text{ fin. } a. \text{ cof. } a.)},$$

Mais à caufe de $(\text{fin. } a)^2 + (\text{cof. } a)^2 = 1$,

le dénominateur de cette fraction = fin. *a*. A + fin. *a*. B ; donc en réduifant on aura

$$x = \frac{V\sqrt{(A+B\,(\text{fin.}\,a)^2)^2 + (B\ \text{fin.}\,a\ \text{cof.}\,a)^2}}{A+B}.$$

On connoit donc la viteffe AE du corps A après le choc, tant pour fa quantité que pour fa direction, puifqu'on a x, & le finus de l'angle z. On connoîtra auffi la viteffe AM du corps B, puifque A M = A E × cof. B A E = x. (cof. a. cof. z − fin. a. fin. z). *C. Q. F. T.*

LXVIII.

Construction. D'un point quelconque de la direction de la viteffe primitive AF, par éxemple du point F même, foit abaiffée fur AB la perpendiculaire F*f*. Soit déterminé le centre de gravité *m* du fiftême des deux corps fupofés placés en A & *f* refpectivement, & foit tirée *m* F. Par les points A & F, foient menées les droites AE, FE paralleles à *m* F & à A*f*. Enfin du point E foit abaiffée E *p* perpendiculaire fur AB. Alors je dis que AE fera la viteffe du corps A après le choc, & A*p* celle du corps B. Fig. 10.

Car fi ayant mené A*h* perpendiculaire fur AF,

on tire les droites mn, mg, ft, fh perpendiculaires aux deux axes AF, Ah, on aura par la propriété du centre de gravité *

$$mn = \frac{B \times ft}{A+B} = \frac{B \times V \text{ cos. } a. \text{ sin. } a}{A+B},$$

$$mg = \frac{B \times fh}{A+B} = \frac{B \times V \text{ cos. } a. \text{ cos. } a}{A+B};$$

donc

$$Fn = AF - An = V - \frac{BV. \text{ cos. } a. \text{ cos. } a}{A+B} =$$

$$\frac{V.(A+B-B.(\text{cos. } a)^2)}{A+B} = \frac{A+B(\text{ sin. } a)^2}{A+B};$$

$$Fm = \frac{V\sqrt{(B. \text{ cos. } a. \text{ sin. } a.)^2 + (A+B(\text{ sin. } a)^2)^2}}{A+B};$$

$$\text{sin. } mFn = \text{ sin. } FAE = \frac{mn}{Fm} =$$

$$\frac{B \text{ sin. } a. \text{ cos. } a}{\sqrt{(B. \text{ cos. } a. \text{ sin. } a)^2 + (A+B(\text{ sin. } a)^2)^2}};$$

D'ou l'on voit que la viteſſe du corps A aprés le choc eſt dirigée ſuivant AE. Il n'eſt pas moins évident que cette même viteſſe eſt exprimée par AE, puiſqu'on a trouvé

* Voyez la Statique de M. Camus. Tom. I. N°. 69.

$x = \frac{V \text{ sin. } a}{\text{sin. } a.\text{ cos. } z + \text{cos. } a.\text{ sin. } z} = \frac{AF \times \text{sin. } BAF}{\text{sin. } BAE}$
$= \frac{AF \times \text{sin. } AFE}{\text{sin. } AEF}$. Enfin A$p$ est la vitesse du corps B, puisque Ap = A E $\times$ cos. E Ap.

L X I X.

Corollaire. Suposons que le corps B soit placé directement sur la route du corps A. Alors l'angle a deviendra nul, & on aura sin. $a = 0$, cos. $a = 1$; par conséquent on aura sin. $z = 0$, $x = \frac{A V}{A + B}$, la vitesse du corps B $= \frac{A V}{A + B}$. Ainsi après le choc les deux corps se mouvront dans le sens du corps A, avec une vitesse commune exprimée par $\frac{A V}{A + B}$; ce qui s'accorde avec les articles LIII & LVI, en faisant dans ces articles $u = 0$, parce que le corps B est ici en repos avant le choc.

L X X.

PROBLEME VI.

Le corps élastique A allant choquer obliquement le corps élastique B en repos, trouver les vitess- Fig. 9.

ses des deux corps après le choc.

SOLUTION.

Il feroit très-facile de trouver les expressions des vitesses en termes analytiques ; mais comme ces expressions seroient un peu compliquées, je me contenterai de les donner en lignes, à l'aide de la construction Géométrique de l'article LXVIII.

Nous avons établi [Art. LIX.] que dans le choc direct des corps élastiques, la vitesse perduë par le corps choquant, & la vitesse gagnée par le corps choqué, sont l'une & l'autre doubles de ce qu'elles auroient été, s'il n'y avoit point eu de ressorts. La même chose est vraie dans le choc indirect des corps élastiques, en supofant comme nous faisons, que les corps sont parfaitement homogênes dans toutes leurs parties, & que par conséquent leurs ressorts se débandent en toutes sortes de sens avec la même force, & suivant la même direction, qu'ils ont été comprimés.

Fig. 10. Sur ce principe, il est visible que si ayant prolongé FE jusqu'à ce que Fe = 2FE, on tire Ae, & qu'on double Ap, les lignes Ae & 2Ap exprimeront les vitesses des deux corps

A & B dans le cas de notre présent problême; car les lignes FE, A *p* expriment respectivement la vitesse perduë par le corps A & la vitesse gagnée par le corps B, dans le cas où ces deux corps sont sans ressorts. *C. Q. F. T.*

On peut tirer de ce Problême un Corollaire pareil à celui de l'article LXIX; il suffit de l'indiquer aux Lecteurs.

LXXI.

PROBLEME. VII.

Le corps dur A allant choquer à la fois obliquement un nombre quelconque de corps durs B, C, D en repos; on demande les vitesses de tous ces corps après le choc. Fig. 11.

Il n'y a que quatre corps dans la figure; mais la solution est la même pour un plus grand nombre.

SOLUTION.

Qu'on joigne à l'instant du choc le centre du corps A avec les centres des corps B, C, D par les droites AB, AC, AD; il est évident que ces lignes seront les directions des vitesses des corps B, C, D après le choc. Soient AF la vitesse du corps A avant le choc,

AE sa vitesse après le choc, FAE l'angle formé par les directions AF, AE. Soit tirée FE & soit achevé le parallelogramme AHFE. Il est clair que AH est la vitesse perduë par le corps A. Soient AM, AP, AS les vitesses des corps B, C, D après le choc, & qu'on décompose toutes les vitesses AH, AM, AP, AS chacune en deux autres AL, AG; AN, AO; AQ, AR; AT, AV dont les prémières soient dirigées suivant AF, & les autres soient perpendiculaires à AF.

Cela posé, il est visible que le mouvement perdu dans le sens A F est $A \times AL$, & que le mouvement gagné dans le même sens est $B \times AN + C \times AQ + D \times AT$; ainsi on aura [Art. XLVIII.] l'équation

(A) $A \times AL = B \times AN + C \times AQ + D \times AT$.

Il n'est pas moins évident que le mouvement perdu dans le sens AO est $A \times AG$, & que le mouvement gagné dans le même sens est $B \times AO - C \times AR - D \times AV$; ainsi on aura [Art. XLVIII.] l'équation

(B) $A \times AG = B \times AO - C \times AR - D \times AV$.

Supofons	Le finus total	$= 1$
	L'angle BAF	$= a$
	L'angle CAF	$= b$
	L'angle DAF	$= c$
	L'angle FAE	$= z$
	AF	$= V$
	AE	$= x$

Soit abaiffée EK perpendiculaire fur AF ; on aura EK ou $AG = x$ fin. z, $AK = x$ cof. z, EK ou $AL = V - x$ cof. z.

L'angle BAE étant la fomme des deux angles BAF, FAE, l'angle CAE la diference des angles DAF, FAE, l'angle DAE la diférence des angles DAF, FAE, on a par les régles de la Trigonométrie

cof. BAE = cof. a. cof. z − fin. a. fin. z,
cof. CAE = cof. b. cof. z + fin. b. fin. z,
cof. DAE = cof. c. cof. z + fin. c. fin. z;
mais [Art. LXVI.] on a

AM = AE × cof. BAE,
AP = AE × cof. CAE,
AS = AE × cof. DAE;

donc

AM = x (cof. a. cof. z − fin. a. fin. z) ;

$$AP = x\,(\text{cos. } b.\ \text{cos. } z + \text{sin. } b.\ \text{sin. } z\,);$$
$$AS = x\,(\text{cos. } c.\ \text{cos. } z + \text{sin. } c.\ \text{sin. } z\,);$$

De plus on a évidemment

$$AN = AM \times \text{cos. } BAF,$$
$$AO = AM \times \text{sin. } BAF;$$

$$AQ = AP \times \text{cos. } CAF,$$
$$AR = AP \times \text{sin. } CAF;$$

$$AT = AS \times \text{cos. } DAF,$$
$$AV = AS \times \text{sin. } DAF:$$

donc

$$AN = x\ \text{cos. } a.\,(\text{cos. } a.\ \text{cos. } z - \text{sin. } a.\ \text{sin. } z\,),$$
$$AO = x\ \text{sin. } a.\,(\text{cos. } a.\ \text{cos. } z - \text{sin. } a.\ \text{sin. } z\,);$$

$$AQ = x\ \text{cos. } b.\,(\text{cos. } b.\ \text{cos. } z + \text{sin. } b.\ \text{sin. } z\,),$$
$$AR = x\ \text{sin. } b.\,(\text{cos. } b.\ \text{cos. } z + \text{sin. } b.\ \text{sin. } z\,);$$

$$AT = x\ \text{cos. } c.\,(\text{cos. } c.\ \text{cos. } z + \text{sin. } c.\ \text{sin. } z\,),$$
$$AV = x\ \text{sin. } c.\,(\text{cos. } c.\ \text{cos. } z + \text{sin. } c.\ \text{sin. } z\,).$$

Par conséquent les équations (A) & (B) se traduiront ainsi

$$(C)\quad A\,V - Ax\,\text{cos. } z = \begin{cases} B\,x\ \text{cos. } a.\,(\text{cos. } a.\ \text{cos. } z - \text{sin. } a.\ \text{sin. } z) \\ +C\,x\ \text{cos. } b.\,(\text{cos. } b.\ \text{cos. } z + \text{sin. } b.\ \text{sin. } z) \\ +D\,x\ \text{cos. } c.\,(\text{cos. } c.\ \text{cos. } z + \text{sin. } c.\ \text{sin. } z); \end{cases}$$

$$(D)\quad A x \,\text{fin.}\, z = \begin{cases} B x \ \text{fin.}\, a. \ (\text{cof.}\, a. \,\text{cof.}\, z - \text{fin.}\, a. \ \text{fin.}\, z) \\ - C x \ \text{fin.}\, b. \ (\text{cof.}\, b. \,\text{cof.}\, z + \text{fin.}\, b. \,\text{fin.}\, z) \\ - D x \ \text{fin.}\, c. \ (\text{cof.}\, c. \,\text{cof.}\, z + \text{fin.}\, c. \,\text{fin.}\, z). \end{cases}$$

En comparant l'équation (D) avec les équations fin. $z = \sqrt{1 - (\text{cof.}\, z)^2}$, cof. $z = \sqrt{1 - (\text{fin.}\, z)^2}$ qui ont toûjours lieu, & dégageant fucceffivement fin. z & cof. z, on trouvera

$$\text{fin.}\, z = \frac{B \ \text{fin.}\, a. \ \text{cof.}\, a - C \ \text{fin.}\, b. \ \text{cof.}\, b - D \ \text{fin.}\, c. \ \text{cof.}\, c}{\sqrt{\begin{cases} (A + B(\text{fin.}\, a)^2 + C(\text{fin.}\, b)^2 + D(\text{fin.}\, c)^2)^2 + \\ (B \ \text{fin.}\, a. \ \text{cof.}\, a - C \ \text{fin.}\, b. \,\text{cof.}\, b - D \text{fin.}\, c. \text{cof.}\, c.)^2 \end{cases}}};$$

$$\text{cof.}\, z = \frac{A + B(\text{fin.}\, a)^2 + C(\text{fin.}\, b)^2 + D \ \text{fin.}\, c)^2}{\sqrt{\begin{cases} (A + B(\text{fin.}\, a.)^2 + C(\text{fin.}\, b)^2 + D(\text{fin.}\, c.)^2)^2 + \\ (B \ \text{fin.}\, a. \,\text{cof.}\, a - \text{fin.}\, b. \,\text{cof.}\, b - D \,\text{fin.}\, c. \,\text{cof.}\, c)^2 \end{cases}}}.$$

Ainfi la direction de la viteffe du corps A après le choc eft connuë. Subftituant les valeurs de fin. z & de cof. z dans l'équation

$$x = \frac{A V}{\begin{cases} (A + B(\text{cof.}\, a)^2 + C(\text{cof.}\, b)^2 + D(\text{cof.}\, c)^2) \ \text{cof.}\, z \\ -(B \ \text{fin.}\, a \,\text{cof.}\, a - C \ \text{fin.}\, b \,\text{cof.}\, b - D \ \text{fin.}\, c \,\text{cof.}\, c) \ \text{fin.}\, z \end{cases}}$$

que donne l'équation (C), on aura la *quantité*

de la vitesse x du même corps A après le choc. Enfin on connoîtra aussi les vitesses AM, AP, AS des corps B, C, D, puisqu'on connoit AE, & les angles BAE, CAE, DAE. *C. Q. F. T.*

Lorsqu'on voudra éfectuer les opérations que nous venons d'indiquer, il ne faut pas oublier que $(\sin. a)^2 + (\cos. a)^2 = 1$, $(\sin. b)^2 + (\cos. b.)^2 = 1$, $(\sin\ c)^2 + (\cos. c)^2 = 1$; cette considération simplifiera & abrégera le calcul.

LXXII.

Fig. 12. *Construction.* Du point F soient abaissées sur les droites AB, AC, AD les perpendiculaires Ff, Fq, Fx. Soit déterminé le centre de gravité m du sistême de tous les corps A, B, C, D suposés placés en A, f, q, x respectivement, & par les points m, F soit tirée la droite m F. Soit élevée par le point m la droite md perpendiculaire à m F. Soit menée AX parallele à mF, & ayant élevé du point F la perpendiculaire FX sur AF, soit divisée la ligne AX en E de manière que l'on ait la proportion $A \times AF + (A+B+C+D) \times Ad : A \times AF :: AX : AE$,

ou bien $AE = \dfrac{A \times AF \times AX}{A \times AF + (A+B+C+D) \times Ad}$.

Enfin du point E soient abbaissées sur AB, AC, AD les perpendiculaires E p, E u, E o. Alors je dis que AE est la vitesse du corps A après le choc, A p, A u, A o celles des corps B, C, D.

Car si ayant mené par le point A la droite hy perpendiculaire à AF, on abaisse des points m, f, q, x, les perpendiculaires mn, mg; ft, fh; qs, qr; xz, xy sur les deux axes AF, hy, on aura par la propriété du centre de gravité

$$mn = \frac{B \times ft - C \times qs - D \times xz}{A+B+C+D} =$$

$$\frac{V(B \sin. a \cos. a - C \sin b \cos. b - D \sin. c \cos. c)}{A+B+C+D};$$

$$mg = \frac{B \times fh + C \times qr + D \times xy}{A+B+C+D} =$$

$$\frac{V(B(\cos. a)^2 + C(\cos. b)^2 + D(\cos. c)^2)}{A+B+C+D}.$$

Donc

$$Fn = V - \frac{V(B(\cos. a)^2 + C(\cos. b)^2 + D(\cos. c)^2)}{A+B+C+D}$$

$$= \frac{V(A+B+C+D-B(\text{cof.}\,a)^2-C(\text{cof.}\,b)^2-D(\text{cof.}\,c)^2)}{A+B+C+D}$$

$$= \frac{V(A+B(\text{fin.}\,a)^2+C(\text{fin.}\,b)^2+D(\text{fin.}\,c)^2)}{A+B+C+D};$$

$$Fm = V\frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(A+B(\text{fin.}\,a)^2+C(\text{fin.}\,b)^2+D(\text{fin.}\,c)^2)^2\\ +(B\,\text{fin.}\,a.\,\text{cof.}\,a-C\,\text{fin.}\,b.\,\text{cof.}\,b-D\,\text{cof.}\,c.\,\text{fin.}\,c)^2\end{array}\right\}}}{A+B+C+D}.$$

Par conféquent fin. $m\,F\,n =$ fin. FAE $= \frac{m\,n}{F\,m}$

$$= \frac{B\,\text{fin.}\,a.\,\text{cof.}\,a - C\,\text{fin.}\,b.\,\text{cof.}\,b - D\,\text{fin.}\,c.\,\text{cof.}\,c}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(A+B(\text{fin.}\,a)^2+C(\text{fin.}\,b)^2+D(\text{fin.}\,c)^2)^2\\ +(B\,\text{fin.}\,a.\,\text{cof.}\,a-C\,\text{fin.}\,b.\,\text{cof.}\,b-D\,\text{fin.}\,c.\,\text{cof.}\,c)^2\end{array}\right\}}}.$$

Ainfi 1°. AX eft la direction de la viteffe du corps A après le choc. 2°. Les deux triangles rectangles $F\,n\,m$, $F\,m\,d$ donnent $F\,n : m\,n ::$ $m\,n : n\,d = m\,n \times \frac{m\,n}{F\,n} = m\,n \times \frac{\text{fin.}\ z}{\text{cof.}\ z} =$

$$\frac{V\,\text{fin.}\,z}{\text{cof.}\,z}\left(\frac{B\,\text{fin.}\,a.\,\text{cof.}\,a - C\,\text{fin.}\,b\ \text{cof.}\,b - D\,\text{fin.}\,c.\,\text{cof.}\,c}{A+C+C+D}\right),$$

& par conféquent $A\,d = A\,n - n\,d =$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} V\,(B\,(\text{cof.}\,a)^2 + C\,(\text{cof.}\,b)^2 + D\,(\text{cof.}\,c)^2) - \\ \frac{V\,\text{fin.}\,z}{\text{cof.}\,z}.(B\,\text{fin.}\,a.\,\text{cof.}\,a - C\,\text{fin.}\,b\,\text{cof.}\,b - D\,\text{fin.}\,c.\,\text{cof.}\,c) \end{array}\right\}}{A + B \quad C + D}$$

De plus on a dans le triangle rectangle AFX, $AX = \frac{AF}{\text{col.}\,z} = \frac{V}{\text{col.}\,z}$. Par conféquent on aura

$$AE = \frac{A \times AF \times AX}{A \times AF + (A + B + C + D) \times A\,d.} =$$

$$\frac{AV}{\left\{\begin{array}{l} (A + B\,(\text{cof.}\,a)^2 + C\,(\text{cof.}\,b)^2 + D\,(\text{cof.}\,c)^2)\,\text{cof.}\,z \\ -(B\,\text{fin.}\,a\,\text{cof.}\,a - C\,\text{fin.}\,b\,\text{cof.}\,b - D\,\text{fin.}\,c\,\text{cof.}\,c)\,\text{fin.}\,z \end{array}\right\}};$$

donc AE eft la viteffe du corps A après le choc. Enfin il eft clair que Ap, Au, Ao, font les viteffes des corps B, C, D, puifqu'on a $Ap = AE \times$ cof. BAE, $Au = AE \times$ cof. CAE, $Ao = AE \times$ cof. DAE.

LXXIII.

Corollaire. Pour faire une aplication de ce Problême général à un cas particulier, fupofons que le corps A frape feulement deux corps B & C égaux entr'eux & femblablement difpofés par raport à fa prémière direction AF. En ce cas, on aura $D = 0$, fin. $c = 0$, $B = C$, fin. $b =$ fin. a, cof. $b =$ cof. a; par conféquent fin. $z = 0$, & cof. $z = 1$; donc après le choc Fig. 13.

le corps A continuë à se mouvoir suivant AF (ce qui est d'ailleurs évident), & sa vitesse

$$AE \text{ ou } x = \frac{AV}{A+B\,(\text{cos. } a)^2 + C\,(\text{cos. } b)^2} =$$

$\frac{AV}{A+2B\,(\text{cos. } a)^2}$. Quant aux vitesses égales Ap, Au, des deux corps B & C, chacune d'elles est exprimée par $\frac{AV \text{ cos. } a}{A+2B\,(\text{cos. } a)^2}$.

LXXIV.

PROBLEME VIII.

Fig. 12. *Le corps élastique A allant choquer à la fois obliquement les corps élastiques B, C, D, en repos, trouver les vitesses de tous ces corps après le choc.*

SOLUTION.

Je me contenterai de déterminer en lignes les vitesses dont il s'agit, au moyen de la construction géométrique de l'Article LXXII.

Soit doublée la ligne FE, ou soit faite $Fe = 2FE$, & soit tirée Ae. Alors Ae est la vitesse du corps A après le choc; & les vitesses des corps B, C, D sont exprimées par les lignes

$2Ap$, $2Au$, $2Ao$ respectivement. C'est ce qui est évident, par les articles LIX & LXXII. *C. Q. F. T.*

LXXV.

COROLLAIRE. Suposons que le corps A frape seulement deux corps B & C égaux & semblablement disposés par raport à sa direction. Alors la vitesse de A après le choc sera représentée par $AF - 2FE$, & la vitesse de B ou de C par $2Ap$. *Fig. 13.*

Si on veut avoir les expressions analytiques de ces vitesses, on trouvera sans peine par les Articles. LIX & LXXII que la vitesse de A après le choc $= \frac{AV - 2BV(\text{cos}.\, a)^2}{A + 2B(\text{cos}.\, a)^2}$, & que celle de B ou de C $= \frac{2\, A\, V\, \text{cos}.\, a}{A + 2B(\text{cos}.\, a)^2}$.

Ce résultat s'accorde parfaitement avec la solution que M. Jean Bernoulli a donnée de ce cas particulier, en employant le principe de la conservation des forces vives, comme on le peut voir dans son *discours sur le mouvement* qui concourut aux prix proposés par l'Académie Royale des Sciences de Paris, en 1724 & 1726.

LXXVI.

Fig. 11. *Scholie.* Les problêmes précédents ne seroient pas plus dificiles à resoudre, si les corps choqués B, C, D, au lieu d'être en repos comme nous l'avons supofé, avoient des mouvemens quelconques, de manière cependant qu'ils fussent tous frapés en même tems par le corps A. Mais il n'est pas possible de s'étendre davantage ici sur ce sujet. Je me dispense de même, pour abréger, de faire voir que lorsque les corps sont élastiques, les forces vives se conservent dans le choc indirect, comme dans le choc direct. Nos Lecteurs pourront s'éxercer sur ces recherches. Enfin je suprime, comme dans l'article LXIV, les aplications particulières dont nos formules générales sont susceptibles. Il ne me reste plus qu'un mot à ajoûter, c'est que M. Maclaurin avoit déja donné les constructions géomêtriques dont je me suis servi; mais il en avoit supprimé l'analyse & la démonstration. Voyez l'Ouvrage de cet Auteur, qui a pour titre : *A Treatise of fluxions*, (*Edinburgh* 1742) *book I, Chap. XII. pag.* 428 & 429, *&c.*

CHAPITRE III.

Du mouvement d'un corps libre quelconque poussé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité.

LXXVII.

LE centre de gravité d'un corps étant un point unique dans ce corps, on conçoit qu'il y a une infinité de cas où la direction de la force imprimée ne passe pas par ce point. Or dans cette Hypothése toutes les parties du corps ne doivent pas parcourir des espaces égaux & paralleles, mais celles qui sont en delà du centre de gravité par raport à la force motrice, doivent aller moins vite que les autres. D'où il est aisé de voir en général que le mouvement absolu du corps est composé d'un mouvement de translation, & d'un ou plusieurs mouvemens de rotation autour du centre de gravité.

LXXVIII.

Pour déterminer tous ces mouvemens, on doit bien remarquer la manière dont agissent

les diférentes fortes de forces qui peuvent pousser le corps proposé. Suposons, par éxemple, qu'un corps de figure quelconque soit choqué par un autre corps, & décomposons la force de la percussion en deux autres, dont l'une soit tangente aux surfaces des deux corps à l'endroit du contact, & dont l'autre soit perpendiculaire aux surfaces en ce même point : il est évident que la force tangentielle ne produit aucun éfet, & que le corps choqué se mouvra de la même manière que s'il avoit reçû seulement l'impression de la force perpendiculaire. Si un corps est tiré par un fil qui lui soit attaché fixement par un bout, il n'y aura aucune décomposition de forces à faire. Il en est de même lorsqu'un corps est poussé par une force accélératrice ou retardatrice qui pénétre sa masse, &c. En général il faut commencer par chercher la quantité & la direction de la force motrice ; ensuite on déterminera les mouvemens qu'elle produit, comme je vais l'expliquer.

LXXIX.

Fig. 14. Soit G un corps quelconque poussé ou tiré par une force F dont la direction FK ne passe pas par son centre de gravité G. Imaginons

que ce corps ſoit depouillé de ſa péſanteur, ou qu'il ſe meuve ſur un plan horizontal ou ſur quelque autre obſtacle qui détruiſe cette force. On verra dans la ſuite des Problêmes où on aura égard à la péſanteur; mais ici pour ſimplifier la queſtion, je ne conſidére que la ſimple force F. Du centre de gravité G ſoit abaiſſée ſur FK la perpendiculaire GK, & par les droites FK, GK ſoit mené le plan HRM qui diviſe le corps en deux parties. Enfin par le centre de gravité G ſoit mené l'axe GV perpendiculaire au plan HRM.

Cela poſé, il peut arriver que les deux parties dans leſquelles le plan HRM diviſe le corps ſoient diférentes entr'elles, ou parfaitement égales & ſemblables. Dans le prémier cas, le corps piroüettera en diférens ſens autour de ſon centre de gravité, parce qu'il n'y a pas un équilibre abſolu entre les éforts que font les diférentes molécules qui le compoſent, pour s'écarter de l'axe GV. La détermination de ces mouvemens en général eſt un Problême très-dificile qui ne peut pas trouver place ici. M. d'Alembert * en a donné le prémier la ſolution

* Dans ſes recherches ſur la préceſſion des équinoxes.

qu'on désiroit depuis longtems, & qu'on doit regarder comme un des plus grands éforts que la Méchanique ait jamais fait.

L X X X.

Mais lorsque le plan HRM partage le corps en deux parties parfaitement égales & semblables, tous les mouvemens que ce corps prend se réduisent à un mouvement de translation suivant la direction de la force imprimée, & a un mouvement de rotation autour de l'axe G V. Voici la solution de ce Problême qui, quoique particulier, s'aplique néanmoins à une infinité de recherches.

Fig. 14. Sur la direction FK de la force imprimée, je prens la partie quelconque FA pour représenter cette force; je divise FA en deux également au point B, & sur FB comme diagonale je construis le parallelogramme FNBO, dont le coté FN passe par le centre de gravité G, & dont le coté FO est perpendiculaire à FB. La moitié FB de la force FA peut se décomposer en deux autres forces FN, FO. Soit prolongée FG de manière que GT = FG, & soit prise TQ=FN. Imaginons que la force FN est apliquée au point T de sa direction, &

qu'elle eſt repréſentée par T Q ; enſuite ſoit décompoſée cette force en deux autres TP, TZ l'une perpendiculaire, l'autre parallele à K G S.

Cela poſé, à la place de la force primitive F A, on aura quatre forces B A, F O, T P, T Z. Or

1°. Les deux forces BA, TP étant paralleles, égales, & paſſant à égales diſtances du centre de gravité G, comme il eſt évident, elles ont pour reſultante une force unique GE qui paſſe par le centre de gravité G, qui leur eſt parallele, & qui eſt égale à leur ſomme, puiſqu'elles agiſſent dans le même ſens : de plus puiſque $BA + TP = FA$, on aura auſſi $GE = FA$; d'oû il ſuit que le centre de gravité G ſera mû de la même manière que ſi la force F A paſſoit directement par ce point. Il eſt clair que la même démonſtration a lieu dans le cas où le corps ne ſeroit pas diviſé en deux parties égales par le plan HRM. Mais il n'eſt pas queſtion ici de ce cas.

2°. Les deux forces F O, TZ ſont évidemment égales, paralleles, & paſſent à égales diſtances du centre de gravité G ſuivant des direc-

tions opoſées ; donc elles ne peuvent faire avancer ce centre ni ſuivant G K, ni ſuivant G S. Donc en vertu de ces deux forces le centre de gravité G doit demeurer immobile. Mais d'un autre coté ces deux mêmes forces ne ſe détruiſent pas, puiſqu'elles ne ſont pas directement opoſées. Donc tout l'éfet qu'elles peuvent produire eſt de faire tourner le corps dans le même ſens autour de l'axe GV, en agiſſant à l'extrêmité des bras de Levier FK, TS, & il eſt évident qu'il ne peut pas y avoir d'autres mouvemens dans les diférens points de la maſſe du corps, puiſque les deux parties déterminées par le plan HRM étant égales, aucune d'elles ne peut ni s'élever ni s'abaiſſer par raport à ce même plan. On voit donc que le corps ſera ſollicité à tourner autour de l'axe GV par un moment de force exprimé par $FO \times FK + TZ \times TS = 2\,FO \times FK = 2\,BN \times FK$; mais à cauſe des triangles ſemblables FKG, FBN, on a $BN \times FK = FB \times GK$; donc $2BN \times FK = 2FB \times GK = FA \times GK$. D'où il ſuit que le corps tournera autour de ſon centre de gravité G de de la même manière que ſi ce point étoit fixe. Voici donc le Théorême qui réſulte de ce qu'on vient de dire.

Lorſqu'un corps eſt pouſſé ſuivant une direction qui ne paſſe pas par ſon centre de gravité, 1°. ce centre eſt mû de la même manière que s'il ſe trouvoit ſur la direction de la force imprimée, (& cela dans tous les cas). 2°. Dans le cas où le plan mené par le centre de gravité & par la direction de la force partage le corps en deux parties égales & ſemblables, le corps tourne autour de l'axe perpendiculaire à ce plan, & paſſant par le centre de gravité, de la même manière que ſi le centre de gravité étoit fixe.

Apliquons ce Théorême au Problême ſuivant où le mouvement eſt ſupoſé ſe communiquer par une percuſſion excentrique.

LXXXI.

PROBLEME

Le corps A mû ſuivant AK allant choquer perpendiculairement en A le corps G diviſé en deux parties égales par le plan HRM : on demande les mouvemens de ces deux corps après le choc. * Fig. 15.

SOLUTION.

Supoſons que ſans la rencontre du corps G, le corps A eut parcouru librement en un inſ-

* Les deux corps ſont cenſés parfaitement durs.

tant l'eſpace infiniment petit Aa; mais qu'à cauſe de la réaction du corps G, il ne parcoure que Ab. Supoſons de plus que le centre de gravité G du corps G parcoure l'eſpace infiniment petit Gg parallele à A K, & qu'en même tems ce corps G décrive autour de l'axe GV tranſporté en gu l'angle infiniment petit kgn. Cela poſé, il eſt clair que le mouvement perdu par le corps A eſt $A \times ba$, & que le mouvement de tranſlation gagné par le corps G eſt $G \times Gg$: on aura donc, en vertu du Théorême, & des principes établis dans le Chapitre précédent, l'équation

$$(A) \quad A \times ba = G \times Gg.$$

En regardant le point G comme immobile (ainſi qu'il eſt permis par la ſeconde partie de notre Théorême), il eſt clair que le moment du mouvement perdu par le corps A relativement à ce même point eſt $A \times ba \times GK$. Ce moment doit être égal [Art. XLIX] au moment du mouvement que gagne le corps G en tournant autour de l'axe G V ou gu, parceque ces deux mouvemens ſe font mutuellement équilibre. Or ſi l'on conſidére une molécule élémentaire quelconque du corps G placée, par exemple, en z, à telle diſtance qu'on voudra

de l'axe GV, & qu'on supose que cette molécule décrive avec le rayon G z, le petit arc zy, tandis que le point K parvenu en k décrit le petit kn avec le rayon gk ou GK, il est évident que prenant kn pour représenter la vitesse de rotation du point k, la vitesse de la molécule dont il s'agit sera exprimée par $\frac{kn}{gk} \times Gz$; par conséquent si l'on nomme m cette même molécule, le mouvement qu'elle gagne, autour de l'axe GV, est représenté par $m \times \frac{kn}{gk} \times Gz$, le moment de ce mouvement par $m \times \frac{kn}{gk} \times Gz \times Gz = m \times \overline{Gz}^2 \times \frac{kn}{gk}$. On voit par cette dernière expression, que pour avoir le moment du mouvement gagné par chaque molécule, il faut multiplier chaque molécule par le quarré de sa distance au point G ou plûtôt à l'axe GV; ensuite multiplier le produit par la fraction $\frac{kn}{gk}$ qui est toûjours la même en quelqu'endroit qu'on prenne la molécule. Donc puisqu'il y a autant de ces momens particuliers qu'il y a de

molécules dans la maſſe G, & que le moment total du mouvement gagné par la maſſe G, autour de l'axe GV, eſt égal à la ſomme des momens des mouvemens gagnés par toutes les molécules, il s'enſuit que ſi l'on nomme S la ſomme des produits des molécules par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GV, le moment du mouvement gagné par le corps G, autour de l'axe GV, ſera exprimé par $S \times \frac{kn}{gk}$. Nous aurons donc cette ſeconde équation

$$(B) \qquad A \times ba \times GK = S \times \frac{kn}{gk}$$

Soient:
- La ligne connuë GK ou gk . . = a
- La viteſſe A a du corps A avant le choc . . . . = V
- La viteſſe A b du même corps apres le choc . . . . . = x
- La viteſſe G g du centre de gravité G . . . . = u
- La viteſſe kn de rotation du point K ou k . . . . = z

Supoſons de plus, pour rendre homogênes tous les termes de nos équations, la quantité S (qui exprime le produit d'une maſſe par le

quarré d'une ligne) = M bb, M étant une masse donnée par la figure du corps, b une ligne aussi connuë.

En substituant à la place des lignes leurs valeurs analytiqûes, les deux équations (A) & (B) se traduiront ainsi

$$(C) \quad A(V-x) = Gu$$

$$(D) \quad A(V-x)a = \frac{Mbbz}{a}.$$

Dans ces deux équations on a trois inconnuës, savoir x, u, z; mais il faut faire attention que pendant la durée du choc, le corps A demeure toûjours contigu au corps G; que par conséquent on a A b = K n, ou ce qui revient au même, cette troisiéme équation

$$(E) \quad x = u + z.$$

Comparant ensemble ces équations, & dégageant les inconnuës, on trouvera

$$x = \frac{(AGaa + AMbb)V}{AGaa + AMbb + GMbb},$$

$$u = \frac{AMbbV}{AGaa + AMbb + GMbb},$$

$$z = \frac{AGaaV}{AGaa + AMbb + GMbb}.$$

Ainsi on connoît la viteſſe du corps A après le choc, la viteſſe de tranſlation du corps G, & la viteſſe de rotation du point K (& par conſéquent auſſi la viteſſe de tout autre point) autour de l'axe GV. *C. Q. F. T.*

LXXXII.

Corollaire. Si on veut que la viteſſe u du centre de gravité G ſoit à la viteſſe z de rotation du point K autour de l'axe GV, comme le nombre quelconque n eſt au nombre quelconque q, il eſt évident qu'on aura la proportion

$$n : q :: Mbb : Gaa;$$

Or puiſque cette proportion ne renferme ni A ni V, il s'enſuit que quelle que puiſſe être la quantité de mouvement du corps choquant A, il y aura toûjours le même raport entre le mouvement de tranſlation du centre de gravité du corps G, & le mouvement de rotation du point K placé à l'extrêmité de la perpendiculaire GK abaiſſé du centre de gravité ſur la direction du choc, pourvû que cette même direction du choc paſſe toûjours à la même diſtance du point G, ou que G K ſoit conſtamment la même. Ainſi lorſque la direction de la force

ſorce imprimée au corps G paſſera à une diſtance G K de ſon centre de gravité G, telle que l'on ait

$$G K = \sqrt{\frac{q M b b}{n G}},$$

le mouvement de tranſlation du centre de gravité, & le mouvement de rotation du point K ſeront entr'eux dans le raport donné de n à q.

Je ne puis m'empêcher de dire en paſſant que ceci peut ſervir à expliquer par une même cauſe, dans le Siſtême Newtonien, le mouvement de tranſlation des Planetes autour du Soleil, & leurs mouvemens de rotation autour de leurs axes. Il n'y a qu'à ſupoſer pour cela que ces aſtres ont été mis en mouvement par l'action de forces dont les directions ne paſſoient pas par leurs centres de gravité. Cette idée ingénieuſe eſt duë à M. Jean Bernoulli.

LXXXIII.

Scholie. Lorſqu'on voudra apliquer les formules précédentes à des éxemples particuliers, la détermination de la quantité M $b\,b$ eſt la ſeule opération qui puiſſe avoir quelque dificulté. Cette opération s'éxécute par les régles que la Géomêtrie preſcrit pour le toiſé des

corps. Ordinairement elle demande le secours du calcul intégral. Mais quelque méthode qu'on employe pour y parvenir, il faut observer soigneusement que le toisé géomêtrique ne donne que des mesures relatives au *Volume*, & non à la *Masse* du corps. Ainsi lorsqu'on aura trouvé parl a Géomêtrie la somme des produits des particules du corps par les quarrés de leurs distances à l'axe GV, ilfaudra multiplier cette somme par la densité d'une molécule, c'est-à-dire [Art. III.] par le raport de la molécule à son volume, ou ce qui revient au même, par le raport de la masse totale au nombre des mesures (par éxemple au nombre des pouces cubes) du volume total, afin d'avoir la quantité M*bb* ou la somme des petites masses élémentaires du corps G par les quarrés de leurs distances à l'axe GV. On comprend assez d'après la notion que nous avons donnée de la densité, dans le même Article III deja cité, que la masse du corps choquant A est pareillement le produit de la densité de chaque molécule de ce corps par le nombre des mêmes molécules, ou ce qui revient au même, le produit du volume total par le raport de la masse entière à son vo-

lume. Je fupofe qu'on ait évalué les volumes des deux corps en mêmes mefures, par éxemple, ou en pouces cubes, ou en pieds cubes, &c. Les maffes fe connoiffent par les poids, parce que nous avons vû [Art. XXXV.] que les maffes de diférens corps font proportionelles à leurs poids. Dans le cas où les corps font homogênes ou de même denfité, le raport des poids, & par conféquent auffi le raport des maffes, eft le même que celui des volumes. Alors on pourra mettre dans les expreffions de x, u, z, à la place de la maffe A fon volume, à la place de Mbb la fomme des parties élémentaires du volume du corps G par les quarrés de leurs diftances à l'axe GV. Eclairciffons tout cela par un ou deux éxemples qui n'éxigent que la fimple Géomêtrie élémentaire pour la détermination de Mbb.

LXXXIV.

EXEMPLE I. *Supofons que le corps G foit une baguette fort mince, & uniforme dans toute fa longueur.* Fig. 16.

La Baguette étant fort mince, chaque tranche Yy perpendiculaire à fa longueur aura, ou du moins pourra être cenfée avoir tous fes

points à égales distances de l'axe G V. Soit la surface de chacune de ces tranches $= cc$, la demie longueur GM ou GN de la baguette$=h$. Suposons de plus que la densité du corps choquant A étant exprimée par 1, la densité de la baguette soit exprimée par p.

Cela posé, puisque le produit de chaque tranche Yy par le quarré de sa distance au centre de gravité G de la baguette est exprimé par $Yy \times \overline{Go}^2$; & que tous ces produits particuliers croissent évidemment depuis le point G jusques au point M comme les élémens d'une Pyramide dont la bâse seroit proportionelle à $Yy \times \overline{GM}^2$, & la hauteur à G M, il s'ensuit que la somme des produits de toutes les particules de la demie baguette G M par les quarrés de leurs distances au point G sera représentée par $Yy \times \overline{GM}^2 \times \frac{GM}{3} = \frac{cch^3}{3}$. Le même raisonnement & la même conclusion ont lieu pour l'autre demie baguette G N. Par conséquent la quantité que nous avons apellée en général Mbb sera ici $= p \times \frac{2cch^3}{3} = \frac{2pcch^3}{3}$. Substi-

tuant cette valeur de Mbb dans les formules générales de l'Article LXXXI, mettant aussi à la place de G sa valeur qui est ici $2pcch$; on aura, toutes reductions faites,

$$x = \frac{(3Aaa + Abb)V}{3Aaa + Abb + 2pcch^3},$$

$$u = \frac{AbbV}{3Aaa + Abb + 2pcch^3},$$

$$z = \frac{3AaaV}{3Aaa + Abb + 2pcch^3}.$$

Si on veut que la vitesse u soit à la vitesse z, comme n est à q on trouvera que la baguette doit être frappée en K, de manière que l'on ait

$$GK = h\sqrt{\frac{q}{3n}}.$$

Dans le cas où le corps A & la baguette seroient homogênes, & où le corps A seroit un cube dont le coté $= f$, on mettroit dans les valeurs de x, u, z, $2cch$ à la place de G, $\frac{2cch^3}{3}$ à la place de Mbb, f^3 à la place de A.

LXXXV.

EXEMPLE. 2. *Soit le corps G un Cylindre* Fig. 17.

droit traversé dans le milieu de sa hauteur par la verge inflexible HM qui est frapée en K par le corps A.

Il est clair que si avec les deux rayons quelconques, mais infiniment peu diférens l'un de l'autre, GX, Gx, on décrit deux cercles ou plûtôt deux surfaces cylindriques XYT, xyt, & qu'on nomme l la hauteur du cylindre, k le raport de la circonférence au rayon, il est évident, dis-je, que la somme des produits des particules comprises entre les deux surfaces cylindriques XYT, xyt, par les quarrés de leurs distances à l'axe GV, sera représentée par $l \times k \times Xx \times XG \times \overline{GX}^2 = l \times k \times Xx \times \overline{GX}^3$. Or tous ces produits élémentaires $l \times k \times Xx \times \overline{GX}^3$ croissent visiblement depuis le centre G jusques à la circonférence HRM, comme la suite des cubes 0, 1, 8, 27, 64, &c. des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, &c; ainsi puisqu'il est démontré * que la somme des cubes 0, 1, 8, 27, &c.

* La sommation des puissances des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, &c. se reduit en général au problême de la quadrature des paraboles de tous les genres. Ce Problême est résolu dans le cinquiéme Livre des Sections coniques de M. de l'Hôpital. (Prop. XIII. N°. 138).

eſt égale au produit du dernier cube multiplié par le quart du nombre de tous ces mêmes cubes, il s'enſuit qu'en nommant p la denſité du Cylindre G, tandis que la denſité du corps A eſt toûjours 1, & faiſant de plus GH = h, on aura ici $Mbb = \frac{plkh^4}{4}$. On aura encore $G = \frac{plkh^2}{2}$. Subſtituant les valeurs de Mbb & de G dans les formules de l'Article LXXXI, on trouvera

$$x = \frac{(4Aaa + 2Ahh)V}{4Aaa + 2Ahh + plkh^4},$$

$$u = \frac{2AhhV}{4Aaa + 2Ahh + plkh^4},$$

$$z = \frac{4AaaV}{4Aaa + 2Ahh + plkh^4}.$$

&c.



CHAPITRE IV.

Des Machines en mouvement.

LXXXVI.

L'Objet de la Méchanique Statique consiste uniquement, comme on sait, à déterminer les raports de plusieurs puissances qui sont apliquées à une machine proposée, & qui se font mutuellement équilibre. C'est à quoi on parvient sans peine par le moyen du principe de la composition & de la décomposition des forces. Aussi cette Science a-t-elle depuis long-tems toute la perfection dont elle est susceptible. Mais on n'a presque rien écrit de suivi sur les mouvemens que la machine prend, lorsque les puissances ne sont pas en équilibre entr'elles. Je me propose de traiter ici ce sujet intéressant.

LXXXVII.

Dans le simple état d'équilibre d'une machine, il n'y a pas à considérer d'autres forces que celles qui lui sont immédiatement apliquées. Mais au moment que la machine vient à se mouvoir, outre la résistance qu'elle opose au mou-

vement par ſon inertie, on voit naître encore, comme d'elles mêmes, deux nouvelles forces, ſavoir la réſiſtance qui provient du frottement des ſurfaces les unes contre les autres, & la dificulté que font les cordes (s'il y en a) à ſe plier autour des cylindres ou tambours qu'elles embraſſent. Ces deux dernières forces qui ne doivent leur exiſtence qu'au mouvement tendent très-éficacement à le rallentir, & même à le détruire entiérement. Il eſt donc à propos de commencer par donner ici, autant qu'il eſt poſſible, le moyen de les évaluer.

SECTION I.

Du Frottement.

LXXXVIII.

LEs ſurfaces des corps, quelques polies qu'elles puiſſent nous paroître, ſont toùjours couvertes d'une infinité de petites éminences & de petites cavités. Lorſque deux corps ſe touchent, les pointes de l'un s'engagent dans les creux de l'autre : delà naît la dificulté qu'on éprouve à les ſéparer, en les faiſant gliſſer l'un ſur l'autre.

Cette résistance du frottement est d'autant plus grande, que les asperités des surfaces qui se touchent sont plus considérables. Ainsi on la diminuera, soit en polissant avec soin ces mêmes surfaces, soit en les enduisant de quelque matière onctueuse qui en remplisse les cavités. On doit encore prendre, autant qu'il est possible, la précaution de ne point faire frotter les unes contre les autres les surfaces de même espéce, par éxemple, l'acier contre l'acier, le fer contre le fer, le cuivre contre le cuivre, &c. parce qu'alors les pointes conviennent trop aux cavités & s'y engagent trop avant; mais il convient au contraire d'oposer l'acier au cuivre ou au fer, &c.

LXXXIX.

La grande question au sujet des frottemens est de savoir si l'étenduë plus ou moins grande des surfaces par lesquelles deux corps se touchent ne contribuë en rien à en augmenter le frottement, en suposant d'ailleurs ces surfaces également polies dans les deux cas. M. Amontons * qui a le prémier examiné cet matiére avec succès, pretend que le frottement est sim-

* Mémoires de l'Académie 1699.

plement proportionel à la pression, c'est-à-dire à la force absoluë qui aplique les deux surfaces l'une contre l'autre, & ne dépend point de leurs grandeurs. La plûpart des Méchaniciens ont adopté ce sentiment. Mais M. Muschenbroek & M. l'Abbé Nollet ne pensent pas tout à fait ainsi. Ces habiles Physiciens croyent qu'il faut compter les surfaces pour quelque chose, pour beaucoup moins cependant que les pressions, dans l'estimation du frottement.

Curieux de savoir par moi-même à quoi m'en tenir sur cet important sujet, j'ai consulté l'expérience, & voici ce qu'elle m'a apris.

X C.

J'ai pris un Parallélepipéde rectangle de bois de chêne, qui pésoit éxactement 51 livres 13 onces, & qui avoit les trois dimensions suivantes

	pieds.	pouces.	lignes.
Longueur	2	5	6,
Largeur	1	3	6,
Epaisseur	0	3	9.

La prémière & la seconde dimensions multipliées ensemble donnent une surface de 65844

lignes quarrées ; j'apelle A cette ſurface, pour abréger. La prémière & la troiſiéme dimenſions multipliées enſemble donnent une ſurface de 15930 lignes quarrées ; j'apelle B cette ſurface. Enſuite ayant fait polir & dreſſer bien de niveau une table de bois de Hêtre, j'ai fait gliſſer le long de cette table le Parallélepipéde propoſé, en le trainant tantôt ſur la face A, tantôt ſur la face B, au moyen d'une petite corde qui paſſoit ſur une poulie de renvoy, & qui étoit tirée par un poids. Il eſt aiſé de ſe repréſenter la figure.

Cela poſé, 1°. ſans charger le Parallélepipéde d'aucun poids étranger, j'ai trouvé que ſoit qu'il gliſsât ſur la face A ou ſur la face B, il falloit toûjours à peu-près le même poids, ſavoir un poids d'environ 16 livres 6 onces, pour vaincre le frottement. Ainſi il me paroît que le frottement eſt proportionel à la ſimple preſſion. Il en eſt ici environ le tiers, puiſque 16 livres 6 onces eſt à 51 livres 13 onces, dans un raport qui n'eſt gueres moindre que celui de 1 à 3. Je fais abſtraction du frottement contre l'eſſieu de la poulie, parce qu'il eſt en éfet preſque inſenſible. Je néglige auſſi l'inertie du pa-

rallélepipéde ; car outre que cette force eſt la même dans les deux cas, il eſt clair que s'il n'y avoit pas de frottement, le plus petit poids ſuffiroit pour la ſurmonter.

2°. En chargeant, dans les deux cas, le parallélepipéde d'un poids de 28 livres, j'ai trouvé que pour vaincre le frottement, il falloit un poids de 25 livres. Le frottement eſt donc encore environ le tiers de la preſſion qui eſt ici de 51 livres 13 onces + 28 livres = 79 livres 13 onces.

La même expérience variée de pluſieurs autres façons a toûjours fait voir que le frottement eſt à peu-près proportionel à la preſſion, & que la grandeur des ſurfaces ne peut y contribuer que d'une manière preſque inſenſible, ſur-tout lorſque les matières qu'on fait frotter enſemble ſont un peu dures. Je n'ai pas beſoin d'ajoûter qu'on ne peut pas aſſigner en général le raport du frottement à la preſſion. Ce raport change ſuivant que les ſurfaces ſont plus ou moins raboteuſes (& non ſuivant qu'elles ſont plus ou moins étenduës, car il faut bien diſtinguer ces deux choſes). Lorſqu'on a ſoin de graiſſer convenablement les eſſieux d'une machine d'ailleurs bien faite, ſouvent le

frottement ne va pas à la sixiéme partie de la pression, comme je m'en suis assuré.

X C I.

En répétant ces expériences, j'ai fait une remarque qui n'a pas échapé à plusieurs Physiciens, & qui mérite la plus grande attention; c'est que le frottement augmente considérablement, jusqu'à devenir quelquefois plus du double de ce qu'il étoit d'abord, lorsqu'on laisse séjourner quelque tems les surfaces les unes sur les autres, ou qu'on donne à la pression le tems d'engrainer les pointes dans les cavités, ou à quelque autre cause physique la liberté de coller, pour ainsi dire, ensemble les deux surfaces. Faute d'avoir eu égard à cette circonstance capitale, des Auteurs célébres on rencontré dans les phénomênes du frottement des variétés qu'ils ont régardées comme inexplicables dans tous les sistêmes. Quand on veut mesurer l'éfet du frottement avec une certaine précision, & comparer ensuite entr'eux les résultats de diférentes expériences, il faut poser légérement sur la surface de suport le corps qui doit glisser, & le livrer promptement à l'action du poids destiné à vaincre le frottement, en prenant garde néanmoins que ce poids n'agisse que par sa pésan-

teur naturelle, & non par aucune ſecouſſe provenant du mouvement d'oſcillation.

XCII.

Pour éclaircir de plus en plus cette matière, j'ajoûterai encore une expérience d'un genre un peu diférent, qui confirme tout ce qu'on vient de dire.

A deux rouës ſuſpenduës verticalement & immobiles ſur leurs centres, dont la prémière avoit 8 pieds 9 pouces de diamétre, la ſeconde 11 pouces 6 lignes auſſi de diamêtre, j'ai fait apliquer ſucceſſivement aux deux extrêmités d'une même corde deux poids chacun de 50 livres, éxactement à même hauteur au deſſus de la ligne de niveau.

Cela poſé, 1°. en me ſervant d'une corde déja uſée qui avoit 8 lignes de diamêtre, j'ai trouvé que pour troubler l'équilibre, ou pour faire gliſſer la corde, il falloit ajoûter à l'un des poids de 50 livres, dans la grande rouë, un autre poids de 272 livres, & dans la petite rouë, un poids de 286 livres. On voit que le poids ajoûté pour vaincre le frottement eſt à peu-près le même dans les deux cas, & que la diférence ne doit être imputée qu'à la dif-

rente qualité des ſurfaces. Il eſt encore évident que le frottement eſt ici preſque les trois-quarts de la preſſion totale; car dans la grande rouë le poids additionel=272 livres, & la preſſion totale =50 livres + 50 livres + 272 livres = 372 livres: Or la fraction $\frac{272}{372}$ n'eſt gueres moindre que la fraction $\frac{3}{4}$. Dans la petite rouë, le poids additionel = 286 livres & la preſſion totale = 386 livres: Or la fraction $\frac{286}{386}$ eſt de très-peu moindre que la fraction $\frac{3}{4}$.

2°. En me ſervant d'un corde preſque neuve qui avoit 13 lignes de diamètre, & qui étoit par conſéquent plus raboteuſe & plus roide que la première, j'ai trouvé qu'il falloit ajoûter à l'un des poids de 50 livres, dans la grande rouë, un poids de 328 livres, & dans la petite rouë, un poids de 375 livres. Le frottement eſt maintenant plus des trois-quarts de la preſſion totale.

Dans cette expérience, les frottemens ont été énormes, comme on voit; mais il y en a pluſieurs raiſons particulieres. 1°. Les rouës étoient

étoient enduites (ſuivant l'uſage qu'on pratique d'ordinaire pour la conſervation des bois) d'une compoſition faite avec de l'huile bouillie, du rouge-brun & de la litharge; cette compoſition laiſſe toûjours ſur les ſurfaces une infinité de petites inégalités. 2°. Il faiſoit un tems très-humide qui donnoit aux parties de la compoſition une viſcoſité fort ſenſible. 3°. Malgré toute la diligence qu'on tâchoit de mettre dans les opérations, on ne pouvoit pas empêcher que les cordes ne ſéjournaſſent quelque tems ſur les parties des gorges qu'elles couvroient.

XCIII.

Concluons des faits expoſés que le frottement eſt ſenſiblement proportionel à la preſſion, & voyons qu'elle en peut être la raiſon phyſique.

Les pointes dont les ſurfaces des corps ſont hériſſées peuvent être regardées, ou comme des petits corps durs incapables de ſe plier, ou comme des petits reſſorts qui ſe courbent ſous les poids qui les preſſent. Or dans le prémier cas, il eſt évident que pour dégager les deux ſurfaces, il faut élever l'une, & que ce qui s'oppoſe à cette action, ce n'eſt que le poids, & non

la grandeur de la surface. Si dans une grande surface il y a plus de pointes engagées que dans une petite, elles le sont moins profondément dans celle-ci précisément suivant le même raport, la pression étant toûjours la même.

Dans le second cas, il est clair que pour vaincre le frottement il s'agit de plier un certain nombre de ressorts proposés. Or si l'on supose que dans des parties égales de la surface d'un corps, il y ait un nombre égal de ces ressorts, un autre surface qui coulera dessus & dont le poids sera toûjours le même, n'éprouvera que la même résistance, soit qu'elle ait plus ou moins d'étenduë, parce que si elle a à plier un plus grand nombre de ressorts, aussi les pliera-t-elle moins. Mais si son poids étoit plus grand, il faudroit qu'elle les pliat d'avantage, & par conséquent elle trouveroit plus de dificulté. Donc considéré sous ce point de vuë le frottement est encore proportionel à la pression.

Au reste quand je dis que le frottement est proportionel à la pression, je n'ai en vuë, comme je l'ai dejà insinué, que les matières dont les parties sont liées fortement entr'elles, soit

que ces parties soient d'ailleurs dures ou élastiques. Mais si les pointes des surfaces se brisent en frottant les unes contre les autres, le nombre de ces pointes, qui est proportionel aux surfaces, augmentera la résistance du frottement. Il y a cependant encore une observation à faire, c'est que même dans le cas dont il s'agit, la pression plus ou moins grande est la cause qui fait briser plus ou moins les pointes des surfaces, & que par conséquent elle contribuë au frottement d'une manière beaucoup plus éficace que l'étenduë des surfaces.

X C I V.

Jusqu'ici nous avons fait abstraction de la vitesse avec laquelle se meuvent les corps en frottant les uns contre les autres, & on ne manquera pas de demander si cette circonstance n'influë point sur le frottement. A cela, voici quelques refléxions. Au prémier aspect, il paroît que la vitesse doit augmenter le frottement ; car plus les corps se meuvent vite, plus il y a de parties dures à dégager, ou plus il y a de ressorts à plier. Cependant il peut arriver & il arrive très-souvent que la vitesse diminuë le frottement, loin de l'augmenter. En éfet

lorſqu'une ſurface coule ſur une autre, les pointes s'éngagent dans les cavités & s'en dégagent ſucceſſivement, ou bien les reſſorts ſe bandent & ſe débandent ſucceſſivement; or ſi la viteſſe eſt telle qu'elle ne donne pas le tems à la preſſion d'opérer l'un ou l'autre éfet au même point que l'auroit opéré une preſſion plus continuée, il eſt évident que le frottement ſera diminué. Nous avons tous les jours ce Phénomène ſous les yeux. Lorſqu'une machine eſt parvenuë à un certain dégré de viteſſe, le frottement ſe fait moins ſentir qu'auparavant. Il ne faut pas conclure néanmoins delà que plus la viteſſe augmentera, plus le frottement diminuera; car le frottement pourra augmenter alors par d'autres cauſes, comme par une plus grande rupture des pointes, &c. Quel eſt donc le dégré de viteſſe qui donne à la force motrice le plus d'avantage contre la réſiſtance du frottement? C'eſt ſur quoi il eſt peut-être impoſſible de ſtatuer rien de précis. Mais on a du moins, aſſez certainement, cette connoiſſance dont la pratique peut retirer beaucoup d'utilité, c'eſt qu'en comparant entr'eux les frottemens qui répondent à diférens mouvemens, ſi ces mouvemens ſont ſenſiblement

uniformes chacun dans leur eſpéce, les viteſſes (quoique diférentes entr'elles) n'éntrent que d'une manière inſenſible dans les eſtimations des frottemens.

X C V.

Je vais apliquer maintenant ces principes généraux ſur le frottement à toutes les machines en particulier. Et comme le prémier objet qu'on doit ſe propoſer, en calculant une machine, eſt de ſavoir ſi elle prendra du mouvement, ou de connoître la force qu'il faut employer pour la tirer de l'état d'équilibre, je ne conſidérerai que les mouvemens naiſſans, & je ſupoſerai que le frottement eſt ſimplement proportionel à la preſſion, car cette hypothéſe eſt ſuffiſamment éxacte pour les machines ordinaires. En prenant ainſi le frottement à l'origîne du mouvement, où il eſt le plus ſenſible, on n'en ſera que plus aſſuré que la machine ira de mieux en mieux, lorſqu'elle aura aquis une certaine viteſſe. Je néglige ici la roideur des cordes qui peuvent ſe trouver dans les machines, mais il en ſera parlé ci-deſſous, comme je l'ai annoncé.

§. I. *Du Frottement dans le Levier.*

X C V I.

Le Levier eſt peu ſujet au frottement. Dans

les cas les plus ordinaires où on employe cette machine, le mouvement de rotation se fait sur un tranchant qui le facilite, & le frottement, dont la direction est tangente aux deux surfaces, agit à l'extrêmité d'un très-petit bras de Levier relativement à celui de la puissance. Ainsi dans la pratique où on n'a pas besoin d'une si grande précision, on peut se dispenser d'avoir égard à cette résistance.

Dans la balance qui est une espéce de levier, & qui demande a être faite avec toute la justesse possible, l'éfet du frottement n'est point à négliger. Pour que cette force ne favorise pas l'un des poids à péser, il faut que les deux bras étant bien égaux, le tranchant sur lequel se fait le mouvement de rotation, se trouve éxactement à égales distances des directions des deux poids, car si ce point de rotation s'aprochoit de l'un des poids, l'autre poids seroit favorisé, (& sans considérer autre chose que le frottement) il seroit d'autant plus favorisé que les poids seroient plus grands, puisque le frottement augmenteroit d'avantage.

§. 2. *Du Frottement ſur les Plans inclinés.*

XCVII.

Soit A un corps de figure quelconque qui s'apuie par ſa baſe GH ſur le plan incliné BD. *Fig. 18.* Ayant pris la verticale AN pour repréſenter la péſanteur abſoluë du corps A, & ayant décompoſé cette force en deux autres, l'une AM perpendiculaire à B D, l'autre A O parallele à BD, on ſait, & la choſe eſt évidente d'elle même, que la force AM avec laquelle le corps A preſſe perpendiculairement le plan incliné eſt à la péſanteur abſoluë A N de ce corps, comme la baſe C D du plan incliné eſt à ſa longueur BD. Par conſéquent ſi l'on nomme P le poids du corps A, on aura la force AM $= P \times \frac{CD}{BD}$; donc en repréſentant par $\frac{n}{1}$, le raport du frottement à la preſſion, le frottement contre le plan BD ſera $= nP \times \frac{CD}{BD}$. Ce frottement doit être regardé comme une force dirigée ſuivant DB, enſorte que pour le vaincre, il faut apliquer au corps une force égale qui ſoit dirigée dans le ſens opoſé B D.

On voit par là que ſi le corps eſt abandonné à la ſeule action de ſa péſanteur relative AO laquelle eſt $= P \times \frac{BC}{BD}$, il ne commencera à deſcendre que quand on aura $P \times \frac{BC}{BD} > nP \times \frac{CD}{BD}$.

Par éxemple, ſupoſons que le poids A ſoit de 600 livres, que le frottement ſoit le quart de la preſſion, & que la hauteur du plan incliné ne ſoit que la douziéme partie de ſa longueur, c'eſt-à-dire $P = 600$ livres, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{BC}{BD} = \frac{1}{12}$, $\frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{144-1}}{12} = \frac{\sqrt{143}}{12}$; la péſanteur relative A O ne ſera que de 50 livres, & la réſiſtance du frottement ſera de près de 150 livres: ainſi le corps ne pourra pas deſcendre. Mais ſi, tout étant d'ailleurs le même, on ſupoſe que la hauteur du plan incliné ſoit les $\frac{3}{5}$ de ſa longueur; c'eſt-à-dire $\frac{BC}{BD} = \frac{3}{5}$, & par conſéquent $\frac{CD}{BD} =$

$\frac{\sqrt{25-9}}{5} = \frac{4}{5}$, la pésanteur relative sera de de 360 livres, & la résistance du frottement de 150 livres. Alors le corps descendra avec l'excès de sa pésanteur relative sur la résistance du frottement, c'est-à-dire avec une force de 210 livres.

§. 3. *Du Frottement dans les Poulies.*

XCVIII.

Soient OMCD une poulie suspenduë par le moyen de sa chape à un point fixe E, le petit cercle A son essieu sur lequel elle tourne librement, ou qu'elle entraine en le faisant tourner lui-même sur deux appuis. Soient P & Q deux poids égaux attachés aux extrêmités de la corde PDCMQ qui passe sur cette poulie. Supposons que pour troubler l'équilibre, ou pour vaincre le frottement, il faille ajoûter à l'un des poids, par éxemple au poids P, un autre poids x. Fig. 19.

Cela posé, il est clair qu'avant l'addition du poids x la pression verticale sur le centre A, ou sur la surface convexe de l'essieu, étoit égale à P+Q, ou à 2 P; ainsi après l'addition du poids x la pression sera $= 2P + x$; donc si l'on dé-

ſigne par n le raport du frottement à la preſſion, le frottement ſera ici exprimé par $n\,(2P+x)$. Or cette force agit ſuivant une direction tangente à la ſurface convexe de l'eſſieu, tandis que le poids x deſtiné à la vaincre agit ſuivant une direction tangente à la ſurface convexe de la poulie ; donc ſi l'on ſupoſe le rayon de l'eſſieu $= a$, le rayon AC de la poulie $= b$, on aura par la nature de l'équilibre,

$$x \times b = n\,(2P + x) \times a\,;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2naP}{b - na}.$$

Par éxemple, ſupoſons que chacun des poids P & Q ſoit de 100 livres, que le frottement ſoit $\frac{1}{5}$ de la preſſion, le rayon de l'eſſieu la ſixiéme partie de celui de la poulie, c'eſt-à-dire $P = 100$ livres, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$: on trouvera

$$x = 6\,\frac{26}{29} \text{ livres.}$$

Ainſi pour vaincre le frottement il faut ajoûter un poids de prés de 7 livres.

XCIX.

Fig. 20. La figure 20 repréſente un ſiſtême de quatre

poulies égales A, B, C, D, qui soûtiennent un poids P. Ce poids est apliqué à la chape de la poulie A; la poulie A est soutenuë par une corde dont la partie 1 est attachée au point fixe E, & la partie 2 à la chape de la poulie B, la poulie B est soûtenuë par une corde dont la partie 3 est attachée en F, & la partie 4 à la chape de la poulie C, &c. Tous les cordons 1, 2, 3, 4, 5, &c. sont paralleles entr'eux & verticaux, & tous les essieux des poulies sont égaux.

Cela posé, dans le simple état d'équilibre & abstraction faite du frottement, les cordons 1 & 2 sont tendus chacun avec une force qui est la moitié du poids P, les cordons 3 & 4 sont tendûs chacun avec une force qui est la moitié de la tension de chacun des cordons 1 & 2, & par conséquent le quart du poids P, &c. ensorte que la tension du dernier cordon 8, ou la puissance O, est la seiziéme partie du poids P. Mais lorsqu'on veut surmonter le frottement les tensions des cordons augmentent, & elles se détermineront de la manière suivante.

Ayant nommé en général *n* le raport du frottement à la pression, *a* le rayon de chaque es-

ſieu, b le rayon de chaque poulie,

1°. La preſſion qui reſulte contre la ſurface de l'eſſieu de la poulie A, en vertu du poids P, eſt P. Soit x l'éfort qu'il faut ajoûter à la tenſion du cordon 2 pour vaincre le frottement, ce même frottement ſera exprimé par $n\,(P+x)$. Donc en raiſonnant comme dans l'article précédent, on aura l'équation

$$bx = n\,(P+x)\,a\,;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{naP}{b-na}.$$

Par conſéquent ſi l'on nomme X la tenſion totale du cordon 2, on aura

$$X = \frac{P}{2} + \frac{naP}{b-na}.$$

2°. S'il n'y avoit pas de frottement contre l'eſſieu de la poulie B, il eſt évident que les deux cordons 3 & 4 ſeroient tendus chacun avec une force égale à $\frac{X}{2}$, enſorte qu'il en reſulteroit contre l'eſſieu de cette même poulie une preſſion égale à X. Soit y l'éfort qu'il faut ajoûter à la tenſion du cordon 4 pour vaincre le frottement de la poulie B, ce même frotte-

ment sera exprimé par $n(X+y)$, & on aura l'équation

$$by = n(X+y)a;$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{naX}{b-na}.$$

Par conséquent si l'on nomme Y la tension totale du cordon 4, on aura

$$Y = \frac{X}{2} + \frac{naX}{b-na}.$$

3°. En raisonnant de même sur la poulie C, & nommant z l'éfort qu'il faut ajoûter à la tension du cordon 6 pour vaincre le frottement, Z la tension totale du même cordon, on trouvera

$$z = \frac{naY}{b-na},$$

$$Z = \frac{Y}{2} + \frac{naY}{b-na}.$$

4°. Nommant u l'éfort qu'il faut ajoûter à la tension du cordon 8 pour vaincre le frottement de la poulie D, V la tension totale du même cordon, ou la puissance O, on aura

$$u = \frac{naZ}{b-na},$$

$$V = \frac{Z}{2} + \frac{naZ}{b-na}.$$

La loi suivant laquelle les tensions X, Y, Z, V dérivent les unes des autres, est si manifeste, que rien n'est plus facile que de calculer ces quantités, quelque puisse être le nombre des poulies.

Pour faire une aplication de ces formules, suposons que le poids P soit de 800 livres, que le frottement soit $\frac{1}{5}$ de la pression, & que le rayon de l'essieu soit $\frac{1}{6}$ de celui de la poulie, c'est-à-dire P=800 livres, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{na}{b-na} = \frac{1}{29}$: on trouvera

$$X = 427\ \frac{17}{29} \text{ livres};$$

$$Y = 228\ \frac{452}{841} \text{ livres};$$

$$Z = 122\ \frac{3642}{24389} \text{ livres};$$

$$V = 65\ \frac{202785}{707281} \text{ livres}.$$

Ainsi la puissance qu'il faudra apliquer en O

ſera d'un peu plus de 65 livres en ayant égard frottement, au lieu que ſans le frottement, elle n'auroit été que de 50 livres.

C.

Examinons encore un éxemple des poulies. *Fig.21.*

Supoſons deux mouſles, compoſées chacune de deux poulies, l'une fixe attachée en E, l'autre mobile qui ſoûtient un poids P. Que toutes les poulies ſoient égales entr'elles, & que les deux eſſieux qui traverſent chaque paire de poulies ſoient auſſi égaux. Enfin que les poulies ſoient embraſſées par une même corde, dont une extrêmité eſt arrétée en D à la chape de la mouſle ſupérieure, & l'autre extrêmité eſt tirée par une puiſſance O. Soient 1 & 2 les cordons qui embraſſent la poulie K, 2 & 3 les cordons qui embraſſent la poulie F, &c. Prenons, comme ci-deſſus, *n* pour repréſenter le raport du frottement à la preſſion, *a* & *b* pour repréſenter les rayons de chaque eſſieu & de chaque poulie.

Cela poſé, dans le ſimple état d'équilibre, tous les cordons 1, 2, 3, 4, 5 ſont tendus chacun avec une force égale au quart du poids

P. Soit x l'éfort qu'il faut ajoûter à la tension du cordon 2 pour vaincre le frottement contre l'essieu de la poulie K, X la tension totale du même cordon 2 ; on trouvera, en raisonnant comme ci-dessus,

$$b x = n \left(\frac{P}{2} + x \right) a ;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\frac{n a P}{2}}{b - n a}$$

& par conséquent

$$X = \frac{P}{4} + \frac{\frac{n a P}{2}}{b - n a} .$$

Soient y l'éfort qu'il faut ajoûter à la tension du cordon 3 pour vaincre le frottement de la poulie F, Y la tension totale du même cordon, on trouvera

$$y = \frac{2 n a X}{b - n a} ,$$

$$Y = X + \frac{2 n a X}{b - n a} .$$

Soient z l'éfort qu'il faut ajoûter à la tension du

du cordon 4 pour vaincre le frottement de la poulie G, Z la tenſion totale du même cordon, on aura

$$z = \frac{2\,n\,a\,Y}{b - n\,a},$$

$$Z = Y + \frac{2\,n\,a\,Y}{b - n\,a}.$$

Enfin ſoient u l'éfort qu'il faut ajoûter à la tenſion du cordon 5 pour vaincre le frottement de la poulie C, V la tenſion totale du cordon 5, ou la puiſſance O, on aura

$$u = \frac{2\,n\,a\,Z}{b - n\,a},$$

$$V = Z + \frac{2\,n\,a\,Z}{b - n\,a}.$$

On procéderoit de même s'il y avoit un plus grand nombre de poulies.

Pour apliquer ces formules à un éxemple, ſupoſons que le poids P ſoit de 800 livres, le frottement le quart de la preſſion, les rayons des poulies ſextuples de ceux des eſſieux, c'eſt-à-dire P = 800 livres, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$;

K

$\frac{na}{b-na} = \frac{1}{23}$: on trouvera

$$X = 217 \frac{9}{23} \text{ livres ;}$$

$$Y = 236 \frac{156}{529} \text{ livres ;}$$

$$Z = 256 \frac{10248}{12167} \text{ livres ;}$$

$$V = 279 \frac{49361}{279841} \text{ livres.}$$

Ainſi la puiſſance qui n'auroit été que de 200 livres ſans le frottement, ſera d'environ 279 livres à cauſe du frottement.

Les frottemens s'évalueront à-peu-près de même dans tous les autres cas des poulies.

§. 4. *Du Frottement dans le tour.*

C I.

Fig. 22. Dans la figure 22, le cercle OMC eſt la coupe du tambour d'un tour ou treuil horizontal qui éleve un poids P par le moyen de la corde MP apliquée au même tambour ; le petit cercle x eſt la coupe de l'eſſieu de la machine ; le cercle BRD eſt la coupe de la rouë à laquelle eſt

apliquée la puiſſance motrice ſuivant une direction tangente quelconque DF.

Le poids P produit ſur le centre, ou l'axe A de mouvement, une preſſion verticale égale à lui-même. Soit repréſentée cette preſſion par la verticale AO. Supoſons que F ſoit la force ſimplement requiſe pour faire équilibre au poids P, & que x ſoit l'éfort qu'il faut ajoûter à F pour vaincre le frottement. Soit repréſentée la force $F + x$ par D E, & ſoit décompoſée cette force en deux autres D K, D H, l'une verticale, l'autre horizontale. La force verticale D K produit ſur le centre A une preſſion égale à elle-même, enſorte que ſi l'on fait O N = D K, la preſſion verticale du centre ſera repréſentée par A N. La force horizontale D H produit ſur le centre A une preſſion horizontale A L égale à elle-même. Par conſéquent ſi l'on àcheve le parallelogramme rectangle A N Q L, & qu'on tire la diagonale A Q, cette diagonale repréſentera la preſſion reſultante contre le point q de la ſurface de l'eſſieu, & cette preſſion occaſionne le frottement qu'on doit regarder comme une force dont la direction touche au point q le cercle x.

Supoſons:

- Le rayon A q de l'eſſieu . . $= a$
- Le rayon AO du tambour . . . $= b$
- Le rayon A D de la rouë . . $= c$
- Le ſinus total . . . . . . $= 1$
- Le ſinus de l'angle HDE (qui eſt connu) . . . . . $= f$
- Le coſinus du même Angle $= \sqrt{1-ff}$ . . . . . $= g$
- Le raport du frottement à la preſſion . . . . $= n$.

La force DK ſera repréſentée par $(F+x)f$; la force D H ou A L par $(F+x)g$; la force A N par $P+(F+x)f$; la force A Q par $\sqrt{(F+x)^2 gg+(P+(F+x)f)^2}$; le frottement par $n\sqrt{(F+x)^2 gg+(P+(F+x)f)^2}$.

Cela poſé, par la nature de l'équilibre le moment de l'éfort x doit être égal au moment du frottement; ainſi on aura l'équation

$$cx = an\sqrt{(F+x)^2 gg+(P+(F+x)f)^2},$$

ou

$$ccxx = aann[(F+x)^2 gg+PP+2Pf(F+x)+ff(F+x)^2],$$

ou bien encore, à cauſe de $gg+ff=1$,

$$ccxx = aann[(F+x)^2+PP+2Pf(F+x)];$$

d'où l'on tire ſans peine

$$x = \frac{fn^2 a^2 P + n^2 a^2 F}{c^2 - n^2 a^2} \pm$$

$$\frac{\sqrt{n^2 a^2 c^2 F^2 - g^2 n^4 a^4 P^2 + n^2 a^2 c^2 P^2 + 2fn^2 a^2 c^2 P F}}{c^2 - n^2 a^2}.$$

CII.

La formule précédente eſt un peu compliquée, & demanderoit d'aſſez longs calculs dans la pratique; mais le plus ſouvent la direction de la force F eſt verticale ou preſque verticale; alors on a ou rigoureuſement, ou du moins ſenſiblement, $g = 0$, $f = 1$: par conſéquent en prenant le ſigne ſupérieur du radical, & en tirant en éfet la racine quarrée, ce qui eſt poſſible, on aura

$$x = \frac{n^2 a^2 (P + F)}{c^2 - n^2 a^2} + \frac{n a c (P + F)}{c^2 - n^2 a^2} =$$

$$\frac{n a (c + n a)(P + F)}{(c - n a).(c + n a)} = \frac{n a (P + F)}{c - n a},$$

ou bien, en mettant pour F ſa valeur $\frac{P b}{c}$,

$$x = \frac{n a \left(P + \frac{P b}{c}\right)}{c - n a},$$

formule fort ſimple, & qu'on auroit pû trouver directement en un moment.

Faiſons une aplication de cette formule; ſupoſons le poids P = 600 livres, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{6}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$: on trouvera

$$x = 3 \frac{163}{179} \text{ livres},$$

c'eſt-à-dire que le petit éfort ajoûté pour vaincre le frottement, ſera d'environ 4 livres. Par conſéquent la puiſſance qui ſans le frottement n'auroit été que de 100 livres, ſera d'environ 104 livres, en ayant égard au frottement.

On voit par là que dans le tour l'éfet du frottement eſt preſque inſenſible, parce que cette force agit à l'extrémité d'un très-petit bras de levier, relativement à celui de la puiſſance.

§. 5. *Du Frottement dans le Coin.*

CIII.

Fig. 23. Soit le triangle iſocéle ACB, le profil d'un coin deſtiné à fendre une piéce de bois MKHN, à l'aide d'un poids P apliqué ſur le milieu de

ſa tête AB qui eſt horizontale. Ayant nommé x le poids qu'il faut ajoûter à P pour vaincre le frottement des faces du coin contre les cotés de la fente, je prens ſur la direction du poids $P + x$ la partie E F pour le repréſenter, & je décompoſe cette force en deux autres E G, E L perpendiculaires ſur les faces A C, B C. Chacune des forces E G, E L eſt égale à $(P + x) \times \frac{AC}{AB}$, & il en réſulte contre A C & C B deux frottemens qu'il faut regarder comme deux forces dirigées ſuivant CA & ſuivant CB : je les exprime par CV & par CX, & j'acheve le parallelogramme VCXT. Cela poſé,

Soient
- A B . . . . $= a$
- A C . . . . $= b$
- Le raport du frottement à la preſſion . . . . $= n$;

on aura C V ou C X $= \frac{n(P+x)\,b}{a}$, & on trouvera aiſément

$$CT = \frac{2n\,(P + x)\sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}}{a}.$$

Or si l'on supose que la partie R F prise sur E F représente le poids additionel x, on doit avoir R F = C T, ou bien

$$x = \frac{2n(P+x)\sqrt{bb+\frac{1}{4}aa}}{a};$$

donc

$$x = \frac{2nP\sqrt{bb+\frac{1}{4}aa}}{a-2n\sqrt{bb+\frac{1}{4}aa}}.$$

Je laisse au lecteur le soin de faire des aplications de cette formule aux nombres.

Dans la pratique, au lieu d'un poids, on employe la force de la percussion qui est infiniment plus éficace pour fendre la piéce M H; mais le frottement s'évaluë de la même maniere.

§. 6. *Du Frottement dans la Vis.*

C I V.

La vis se raporte au plan incliné, comme on sait; ainsi le frottement s'évaluë à-peu-près de même dans ces deux machines. Mais pour

l'ordinaire la vis est construite si grossiérement, elle est sujette d'ailleurs à tant d'arcs-boutemens (qui sont comme des forces étrangères au frottement), qu'on ne peut gueres se flater de calculer avec une certaine précision la puissance qu'il lui faut apliquer pour mettre un poids donné en mouvement : C'est pourquoi je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet.

§. 7. *Du Frottement d'une Rouë verticale qui roule sur un Plan.*

C V.

Dans toutes les machines dont nous venons d'éxaminer les frottemens, c'est toûjours la même surface qui s'aplique successivement sur les diférentes parties d'une autre surface. Mais dans une rouë qui roule sur un plan, les diférentes parties de la surface convexe de cette rouë s'apliquent successivement sur les diférentes parties de la surface parcouruë. Ce cas est fort diférent de l'autre, & il mérite d'être traité en particulier.

Soit OMC une rouë verticale qui se meut sur un plan quelconque GH, en vertu d'une puissan- *Fig.24.*

ce qui passe par son centre A de gravité & de figure, & qui est parallele au plan GH. Suposons que la rouë marche dans le sens GH, & que la puissance qui la pousse soit représentée par la partie AK de sa direction. Il est évident que s'il n'y avoit pas de frottement au point M de la rouë, ou que si ce point M n'étoit pas repoussé suivant MG, la rouë n'auroit qu'un simple mouvement progressif le long du plan G H. On pourroit déterminer sa vitesse par les formules du Chapitre II. de ce livre, en regardant la puissance apliquée en A, comme le mouvement perdu par un corps proposé. Mais à cause du frottement qui se fait continuellement en M, la rouë a deux mouvemens, l'un de translation le long du plan G H, l'autre de rotation autour de son centre de gravité. Cela suit de l'Article LXXX. On voit que si ayant pris M V pour représenter le frottement du point M, on fait KR= M V, on voit dis-je, 1°. que le centre de gravité sera mu de la même manière que s'il étoit poussé par la seule force A R. 2°. Que la rouë tournera autour de son centre de gravité A, en vertu d'un moment de force

exprimé par M V × A M. Je n'ai pas besoin d'ajoûter que la force AK ne contribue en rien au mouvement de rotation, parce que cette force a un moment nul par raport au point A.

C V I.

En reduisant ainsi le problême à la géomêtrie, il est évident que si l'on connoissoit bien la force M V, on détermineroit éxactement les deux mouvemens de la rouë. Mais comment la force M V est-elle produite ?

Pour répondre à cette question, nous observerons qu'il arrive deux cas dans la nature : ou le point M de la circonférence OMC, tourne moins vite que ne marche le centre A, ou le point M & le centre A ont la même vitesse. Or dans le prémier cas, le point M & les parties physiques qui lui sont contiguës, glissent sur le plan M H ; d'où résulte un véritable frottement qui tend à retarder la vitesse progressive de la rouë, & à accélérer la vitesse de rotation. Ce frottement se complique avec une autre sorte de frottement dont on va parler, & il est dificile d'assigner la force MV qui en resulte, parce qu'on manque là-dessus d'expériences satisfaisantes.

Dans le second cas (qui a lieu le plus souvent dans les rouës de voitures, qui roulent librement sur le terrain), le point M de la rouë ne *glisse* pas sur le point M du plan GH, parce que le prémier point est autant emporté en arrière par la vitesse de rotation, qu'il est emporté en avant par la vitesse progressive, & il est évident que la rouë se meut, comme si on la posoit successivement sur tous les points de l'espace parcouru M H, sans faire frotter ses parties contre celles du même espace. Alors on seroit d'abord porté à croire qu'il n'y a plus de force MV, & que le mouvement doit se perpetuer. Cependant il est de fait que le mouvement s'éteint assez promptement, & ce n'est pas à la résistance de l'air qu'il faut s'en prendre, car cette résistance est comme nulle, lorsque la vitesse est fort lente. La véritable raison de cet éfet, est qu'à mesure que la rouë avance vers H, elle s'enfonce à chaque instant d'une certaine quantité dans le plan M H, & ensuite elle est soulevée de la même quantité. Or cela ne peut pas se faire sans qu'elle ne rencontre sans-cesse obliquement des obstacles, tels que des pointes, des ressorts &c. qui résistent en partie dans le sens M G. Il n'est pas possi-

ble d'entrer ici dans de plus grands détails. Voyez à ce ſujet un très-beau Mémoire de M. Euler, imprimé dans le Tom. VI. des nouveaux Mémoires de l'Académie de Petersbourg, & qui a pour titre, *de frictione corporum rotantium.* Voyez auſſi ce qu'ont écrit ſur cette même matière M. Daniel Bernoulli, & M. Euler, dans le Tom. XIII. des anciens Mémoires de l'Académie de Pétersbourg.

C V I I.

Je finis par une obſervation importante dans la pratique.

De quelque cauſe que la force M V provienne, il eſt certain que le frottement des corps *roulans* eſt beaucoup moins conſidérable que celui des corps qui ne font que *gliſſer* ſans rouler. Ordinairement on apelle celui-ci *frottement de la prémière eſpéce*, & l'autre, *frottement de la ſeconde eſpéce.* On doit employer l'un ou l'autre, s'il eſt poſſible, ſuivant l'éxigence des cas. Dans les deſcentes un peu roides, on enraye les rouës des voitures, ou on les empêche de tourner, afin de rallentir leur viteſſe. Il y a réciproquement une infinité d'occaſions

où l'on ſubſtitue avec avantage le frottement de la ſeconde eſpéce à celui de la prémière.

Il ne ſera peut-être pas inutile d'ajoûter ici, au ſujet des rouës qu'on enraye, que non ſeulement on ſubſtitue par ce moyen le frottement de la prémiere eſpéce à celui de la ſeconde, mais qu'on fait encore diminuer la viteſſe par une autre raiſon. En éfet ſupoſons pour un moment que les deux genres de frottemens ſoient parfaitement les mêmes, & que chacun d'eux ſoit exprimé par la même ligne M V prise ſur MG. Cela poſé, lorſque la rouë n'eſt pas enrayée, le centre A eſt accéléré par la force AK, & il eſt retardé par la force MV ou KR; enſorte que la réſultante eſt ſimplement $AR = AK - KR = AK - MV$. Mais lorſque la même rouë eſt enrayée, de quelque manière que la rotation ſoit empêchée, il eſt clair qu'à cet égard la rouë eſt dans le même cas que ſi elle étoit pouſſée par les deux forces MV, N E égales & paralleles, dirigées dans le même ſens, & apliquées aux deux extrêmités du diamêtre M N. Or en vertu de ces deux forces, le centre A eſt retardé avec une force égale à 2MV, enſorte que la force réſultante

Fig. 24.

qui pousse maintenant ce point est A K — 2 M V ; donc, &c.

SECTION II.

De la roideur des Cordes.

CVIII.

IL est constant qu'une corde donnée est d'autant plus roide, ou fait d'autant plus de dificulté à se plier,

1°. Qu'elle est tenduë avec plus de force, ou qu'elle est chargée d'un plus grand poids,

2°. Qu'elle est plus grosse,

3°. Qu'elle s'envelope autour d'un plus petit rouleau.

On ne sait pas bien précisément suivant quelle loi, ces trois élémens, la tension de la corde, son diamêtre, le diamêtre du rouleau, concourent à produire la roideur ; mais on peut (avec Mrs. Amontons, Desaguliers, Bouguer, &c.) prendre pour hypotêse assez conforme à l'expérience que *la roideur est en*

raiſon compoſée de la directe du poids qui tend la corde, du diamêtre de la corde, & de l'inverſe du diamêtre du rouleau autour duquel la corde s'envelope. Cette régle ſupoſe que les diférentes cordes, dont on veut comparer les roideurs, ſont de même eſpéce, c'eſt-à-dire également neuves, également torſes, &c.

Il eſt certain que le plus ou le moins de viteſſe avec laquelle une corde s'envelope, influe en quelque choſe ſur ſa roideur ; mais comme je ne conſidére ici que les mouvemens naiſſans, la viteſſe ne doit pas entrer en ligne de compte.

C I X.

Entre les diférens moyens qu'on peut employer, pour éprouver la roideur des cordes, voici celui qui me paroît le plus ſimple & le plus éxact.

Fig. 25. & 26. Soient OCM, VDN deux rouleaux ou deux poulies mobiles ſur leurs eſſieux, auſquelles ſoient apliqués reſpectivement les deux poids P & Q, R & S, à l'aide de deux cordes de diférens diamêtres. Les deux poids P & Q ſont égaux, de même que les deux poids R & S reſpectivement. Supoſons que pour troubler l'équilibre,

l'équilibre, ou pour vaincre les frottemens & les roideurs des cordes, il faille ajoûter au poids P un petit poids connu *p*, & au poids R un petit poids connu *r*. Il s'agit de trouver directement les parties pour lesquelles les frottemens & les roideurs des cordes entrent dans les poids additionels *p* & *r*.

Soient
- Le rayon de l'essieu de la poulie O C M . . . . $= a$
- Le rayon de cette même poulie $= b$
- Le rayon de la corde P C Q $= c$
- Le rayon de l'essieu de la poulie V D N . . . . $= l$
- Le rayon de cette même poulie $= m$
- Le rayon de la corde R D S . . $= h$
- La partie du poids *p* destinée à vaincre le frottement . . . $= x$
- La partie du même poids *p* destinée à vaincre la roideur de la corde P C Q . . . . . . $= y$
- La partie du poids *r* destinée à vaincre le frottement . . . $= z$
- La partie du même poids *r* desti-

Soient { née à vaincre la roideur de la corde R D S . . . . . . $= a$
Le raport du frottement à la pression . . . . $= n$.

Nous avons ici cinq inconnuës à déterminer, savoir x, y, z, u, n. Or

1°. on a, comme il est évident,

$$(A) \quad x + y = p;$$
$$(B) \quad z + u = r.$$

2°. La pression totale sur l'essieu de la poulie O C M étant ici $2P + p$, il est clair, par tout ce qui a été dit ci-dessus, qu'on aura

$$(C) \quad bx = n(2P + p)a;$$

de même on aura

$$(D) \quad mz = n(2R + r)l.$$

3°. On aura en vertu de l'Hypothése que nous avons adoptée sur la roideur des cordes,

$$y : u :: \frac{(2P + p) \times c}{b} : \frac{(2R + r) \times h}{m};$$

d'où l'on tire

$$(E) \quad bh(2R + r)y = mc(2P + p)u.$$

Comparant ensemble les cinq équations (A), (B, (C), (D), (E) suivant les régles ordinaires de l'Algébre, on trouvera

$$x = \frac{p(2R+r)\,bha - r\,(2P+p)\,cma}{(2R+r)(bah-bcl)};$$

$$y = \frac{r\,(2P+p)\,cma - p\,(2R+r)\,bcl}{(2R+r)(bah-bcl)};$$

$$z = \frac{p\,(2R+r)\,bhl - r\,(2P+p)\,cml}{(2P+p)(amh-cml)};$$

$$u = \frac{r(2P+p)\,amh - p\,(2R+r)\,bhl}{(2P+p)(amh-cml)};$$

$$n = \frac{p\,(2R+r)\,bh - r\,(2P+p)\,cm}{(2P+p).(2R+r).(ah-cl)}.$$

C X.

Il eſt bon de lever, au ſujet de ces formules, une dificulté analytique qui pourroit embarraſſer quelques Lecteurs.

Lorſque les rayons des eſſieux ſont entr'eux comme ceux des cordes, ou qu'on a $ah = cl$, il ſemble, au prémier coup d'œil, que les valeurs de de x, y, z, u, n ſont infinies, parce qu'alors on a

$$ah - cl = 0,$$
$$bah - bcl = 0,$$
$$amh - cml = 0.$$

Mais il faut conſidérer que dans les fractions propoſées les numerateurs & les dénominateurs

deviennent zero dans la même hypothése, ce qui fait que ces mêmes fractions sont toûjours des quantités finies.

En éfet les équations (C) & (D) donnent
$$x : z :: am\,(2P+p) : bl\,(2R+r)$$
ou bien
$$\frac{x}{am} : \frac{z}{bl} :: 2P+p : 2R+r;$$
& l'équation (E) donne
$$y : u :: \frac{c(2P+p)}{b} : \frac{h(2R+r)}{m},$$
ou bien
$$\frac{by}{c} : \frac{mu}{h} :: 2P+p : 2R+r;$$
donc $\frac{x}{am} : \frac{z}{bl} :: \frac{by}{c} : \frac{mu}{h};$

ou bien
$$x : z :: \frac{ay}{c} : \frac{lu}{h}$$
ou bien, à cause qu'on a ici $\frac{a}{c} = \frac{l}{h}$,
$$x : z :: y : u;$$
donc $x+y : z+u :: x : z;$

ou bien
$$p : r :: x : z :: am\,(2P+p) : bl\,(2R+r);$$
donc $p(2R+r)bl = r(2P+p)am;$

ou bien, en mettant pour l sa valeur $\frac{ah}{c}$,

$$p(2R+r)\frac{bah}{c}=r(2P+p)am;$$

ou bien encore

$$p(2R+r)bha=r(2P+p)cma.$$

On trouvera pareillement

$$p(2R+r)bhl=r(2P+p)cml;$$
$$r(2P+p)amh=p(2R+r)bhl;$$
$$p(2R+r)bh=r(2P+p)cm.$$

Ainsi les numerateurs des valeurs de x, y, z, u, n deviennent zero en même tems que leurs dénominateurs; donc toutes ces quantités ne sont ni infinies, ni zero, mais finies, & voici comment il faut les déterminer.

Puisqu'on a

$$x+y:z+u::x:z$$

ou

$$p:r::x:z;$$

&

$$y:u::am(2P+p):bl(2R+r),$$

on aura, pour trouver les quatre inconnuës x, y, z, u, les quatre équations

$$x+y=p$$
$$z+u=r$$
$$pz=rx$$

$$y\,b\,l\,(2\,R + r) = u\,a\,m\,(2\,P + p).$$

Or si on supose $x = \frac{p}{t}$ (t étant un nombre quelconque positif plus grand que l'unité), $z = \frac{r}{t}$, & par conséquent $y = p - \frac{p}{t}$, $u = r - \frac{r}{t}$, il est clair que ces quatre valeurs satisferont aux quatre équations précédentes. On voit donc que dans ce cas particulier le problême est indéterminé, & qu'on ne peut pas, comme dans l'hypothése générale, déterminer par les équations mêmes les frottemens & les roideurs des cordes; mais qu'il faut regarder comme connuës les valeurs des frottemens pour en conclure celles des roideurs, ou les valeurs des roideurs pour en conclure celles des frottemens.

C X I.

Toutes les expériences que j'ai pu faire pour éprouver la roideur de diférentes cordes, s'accordent assez avec les calculs précédens. Je me contenterai d'en raporter ici une seule ; elle suffira pour montrer au Lecteur la manière d'apliquer dans chaque cas particulier nos formules générales à la pratique.

J'ai fait suspendre bien-à-plomb une poulie fort

légère qui avoit 10 pouces 6 $\frac{1}{2}$ lignes de diamêtre à nud. Elle étoit traversée quarrément par un essieu de bois de Bouis de 8 lignes de diamêtre, & elle tournoit très-librement sur les apuis de cet essieu. J'ai pris deux cordes neuves peu torses dont la prémière avoit 9 lignes de diamêtre, & la seconde 13 lignes de diamêtre, & ayant apliqué successivement ces deux cordes à la poulie, j'ai ataché à chacun des deux bouts de la corde dans les deux cas un poids de 100 livres 12 onces. Cela fait, j'ai trouvé que pour faire descendre l'un des poids, ou pour vaincre le frottement & la roideur de la corde, il falloit ajoûter un poids de 6 livres lorsqu'on se servoit de la petite corde, & un poids de 7 livres 8 onces, lorsqu'on se servoit de la grosse corde.

Suposant que l'action d'une corde s'éxerce suivant la direction de son axe, il est clair qu'en se servant de la petite corde, le diamêtre de la poulie proposée doit être censé de 11 pouces 3 $\frac{1}{2}$ lignes, & qu'en se servant de la grosse corde, le diamêtre de la poulie est de

11 pouces $7\frac{1}{2}$ lignes. On aura donc ici $P =$ $R = 100$ livres 12 onces $= 100\frac{3}{4}$ livres, $p = 6$ livres, $r = 7$ livres 8 onces $= 7\frac{1}{2}$ livres, $2P + p = 207\frac{1}{2}$ livres, $2R + r = 209$ livres, $2a = 2l = 8$ lignes, $2b = 11$ pouces $3\frac{1}{2}$ lignes $= 135,5$ lignes, $2m = 11$ pouces $7\frac{1}{2}$ lignes $= 139,5$ lignes, $2c = 9$ lignes, $2h = 13$ lignes. Mettant à la place des lettres leurs valeurs dans les formules de l'Article CIX, on trouvera

$$x = 2\frac{227945}{906224} \text{ livres.}$$

$$y = 3\frac{678279}{906224} \text{ livres.}$$

$$z = 2\frac{10638673287}{52463572920} \text{ livres.}$$

$$u = 5\frac{15593113173}{52463572920} \text{ livres.}$$

$$n = \frac{552946503}{3008663680}.$$

D'où l'on voit que pour vaincre le frottement, il faut dans l'un & dans l'autre cas un poids d'un peu plus de 2 livres; mais que la roideur de la petite corde est équivalente à un poids d'un peu moins de 4 livres, & celle de la grosse à un poids d'un peu plus de 5 livres. On voit aussi que le frottement n'est guere plus de la sixiéme partie de la pression.

C X I I.

Scholie. En joignant ces notions sur la roideur des cordes à celles que nous avons données dans la section précédente sur les frottemens, on est en état de déterminer la force qu'il faut apliquer à une machine proposée pour la tirer de l'état d'équilibre. Voici un éxemple où on a égard à ces deux considérations; c'est celui des poulies de l'Article XCIX. *Fig.* 30.

Soient
- Le rayon de chaque essieu . . = a
- Le rayon de chaque poulie en y comprenant celui de la corde = b
- Le rayon de chaque corde . . = c
- L'éfort qu'il faut ajoûter à la tension du cordon 2 pour vaincre

Soient {
tout à la fois le frottement & la roideur de la corde . . . = x
La tenſion totale du cordon 2. = X
L'éfort qu'il faut ajoûter à la tenſion du cordon 4 pour vaincre le frottement & la roideur de la corde . . . . . . = y
La tenſion totale du même cordon 4 . . . . = Y
L'éfort qu'il faut ajoûter à la tenſion du cordon 6 pour vaincre le frottement & la roideur de la corde . . . . . . = z
La tenſion totale du même cordon 6 . . . . = Z
L'éfort qu'il faut ajoûter à la tenſion du cordon 8 pour vaincre le frottement & la roideur de la corde . . . . . . = u
La tenſion du même cordon, ou la puiſſance demandée . . = V
Le raport du frottement à la preſſion . . . . = n.
}

Supoſons de plus qu'une corde dont le rayon eſt h, ſous une preſſion connuë que je nom-

me N, en se pliant autour d'une poulie dont le rayon augmenté de celui de la corde est m, ait une roideur égale à un poids q. Ces quantités h, N, m, q sont données par l'expérience raportée dans l'Article précédent.

Cela posé, il est clair que la pression contre l'essieu de la poulie A est $P + x$, & le frottement $n(P+x)$. Il n'est pas moins évident que si l'on fait cette proportion $\frac{Nh}{m} : q :: \frac{(P+x)c}{b}$; un quatriéme terme, ce quatriéme terme $\frac{qmc(P+x)}{Nbh}$ exprimera la roideur de la corde apliquée à la poulie A.

Maintenant on voit que les deux forces x & $\frac{qmc(P+x)}{Nbh}$ agissent à l'extrêmité du rayon de la poulie, tandis que la force $n(P+x)$ agit à l'extrêmité du rayon de l'essieu, & comme la nature de l'équilibre demande que le moment de la force x soit égal à la somme des momens des deux autres forces, il s'ensuit qu'on aura,

$$bx = n(P+x)a + \frac{qmc(P+x)b}{Nbh}$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{naP + \frac{qmcP}{Nb}}{b - na - \frac{qmc}{Nb}};$$

donc

$$X = \frac{P}{2} + \frac{naP + \frac{qmcP}{Nb}}{b - na - \frac{qmc}{Nb}};$$

On trouvera de même

$$y = \frac{naX + \frac{qmcX}{Nb}}{b - na - \frac{qmc}{Nb}};$$

$$Y = \frac{X}{2} + \frac{naX + \frac{qmcX}{Nb}}{b - na - \frac{qmc}{Nb}}.$$

$$z = \frac{naY + \frac{qmcY}{Nb}}{b - na - \frac{qmc}{Nb}};$$

$$Z = \frac{Y}{2} + \frac{naY + \frac{qmcY}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}};$$

$$x = \frac{naZ + \frac{qmcZ}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}};$$

$$V = \frac{Z}{2} + \frac{naZ + \frac{qmcZ}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}};$$

Supoſons, par éxemple, que le poids P ſoit de 800 livres, le rayon de l'eſſieu de 8 lignes, le rayon de la poulie de 4 pouces ou de 48 lignes, le rayon de la corde de 6 lignes, & prénons pour hypothéſes, que le frottement ſoit $\frac{1}{5}$ de la preſſion, & qu'une corde de 9 lignes de diamêtre, ſous une preſſion de 208 livres, en ſe pliant autour d'une poulie de 11 pouces $2\frac{1}{2}$ lig. de diamêtre, ait une roideur équivalente

à un poids de 4 livres en nombre rond. On aura $P = 800$ livres, $a = 8$ lignes, $b = 48$ lignes, $c = 6$ lignes, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{qm}{Nb} = \frac{4 \times (135,5)}{208 \times 9}$ $= \frac{4 \times 1355}{208 \times 90} = \frac{271}{936}$, $\frac{qmc}{Nb} = \frac{271}{156}$ lignes. Par conséquent (en négligeant les fractions qui ne feroient qu'allonger le calcul sans lui donner sensiblement plus de précision), on aura

$$X = 460 \text{ livres},$$
$$Y = 264 \text{ livres},$$
$$Z = 152 \text{ livres},$$
$$V = 87 \text{ livres}.$$

Dans l'Article XCIX, on a trouvé sur le même exemple, qu'en ayant égard au frottement la puissance devoit être de 65 livres. La roideur des cordes augmente donc encore la puissance de 22 livres; & tout considéré, cette puissance est d'environ 87 livres, tandis qu'elle n'auroit été que de 50 livres, s'il n'y avoit eu ni frottemens, ni roideurs de cordes. Cet exemple suffit pour montrer combien il est essentiel de ne pas négliger ces deux résistances, lorsqu'on veut calculer l'éfet d'une Machine avec une certaine éxactitude.

SECTION III.

Solutions des diférens Problêmes qui concernent les mouvemens des Machines.

CXIII.

QUelque puiſſe être l'agent qui meut une Machine propoſée, la force qu'il éxerce à chaque inſtant eſt toûjours équivalente à un certain poids. Ainſi le Problême général que nous avons à réſoudre conſiſte à déterminer le mouvement que la machine prendra en vertu d'un poids donné qui eſt plus grand qu'il ne faut pour faire ſimplement équilibre au fardeau qu'on veut élever, en ayant égard, lorſqu'il eſt néceſſaire, au frottement & à la roideur des cordes.

En conſidérant ainſi la force motrice comme un poids qui l'emporte ſur les réſiſtances à vaincre, & qui eſt une force accélératrice dont l'action ſe répéte continuellement, il eſt évident que le mouvement de la machine ira en s'accélérant de plus en plus. Mais dans la plûpart des machines cette accélération ne dure qu'un tems aſſez court, parce que la force mo-

trice diminuë à mésure que la vitesse augmente, & que bientôt elle suffit simplement pour faire équilibre avec les résistances oposées. Alors le mouvement devient sensiblement uniforme, & demeure tel en vertu de l'inertie de la matière; toutes les forces qui agissent sur la machine se détruisent mutuellement. Cette remarque s'aplique principalement aux machines mues par l'action des animaux. En éfet il est certain qu'un animal agit avec d'autant moins de force qu'il est obligé d'aller plus vite. Par éxemple, un homme qui, en agissant avec ses bras, est capable au prémier instant d'un éfort de 50 à 60 livres, n'éxerce gueres qu'un éfort de 25 à 26 livres, lorsqu'il se meut pendant quelque téms avec une vitesse d'environ 4 pieds par seconde. La même chose doit s'entendre de tout autre animal, proportion gardée, &c. Voyez à ce sujet, dans le cours de Physique expérimentale du Docteur Desaguliers, les réfléxions de cet Auteur sur la force comparative des hommes & des chevaux, & sur la meilleure manière d'apliquer ces forces. Voyez aussi l'Ouvrage de Borelli qui a pour titre *de motu animalium, &c.*

Quoiqu'il en soit, il est presque toûjours permis

permis de ſupoſer que le poids moteur demeure conſtant au commencement du mouvement. Cette ſupoſition dont je ferai uſage, facilite le moyen de déterminer le mouvement que la machine prendra d'abord, & qu'elle conſervera dans la ſuite à quelques légères altérations près. Si l'on vouloit avoir égard à la diminution de la force motrice, on ſe jetteroit dans des calculs abſtraits qui ne peuvent pas entrer dans un Ouvrage élémentaire. Ajoûtons qu'il reſte toûjours quelque incertitude ſur la loi de cette diminution. J'éviterai, par les mêmes raiſons, de faire entrer la viteſſe dans l'eſtimation du frottement, & de la roideur des cordes : je n'aurai égard dans ce calcul qu'à la ſimple preſſion; en évaluant d'ailleurs cette preſſion comme il convient dans le cas du mouvement. Enfin je négligerai les poids des cordes, qui ſont en éfet pour l'ordinaire fort petits en comparaiſon des fardeaux à élever, ou du moins (ce qui eſt plus éxact) je comprendrai le poids de chaque partie de corde dans le grand poids qu'elle ſoûtient, & je regarderai la ſomme comme conſtante pendant la génération du mouvement, quoique cette ſomme ſouffre un petit changement à meſure que la corde

ſe ploye ou ſe déploye. Toutes ces circonſtances dont on eſt forcé de depoüiller les Problêmes ſuivans, n'empêcheront pas qu'il ne reſte à ces mêmes Problêmes une généralité ſufiſante pour la pratique.

Il ſemble que pour l'élégance des ſolutions, il conviendroit de propoſer & de réſoudre d'abord les queſtions le plus généralement qu'il eſt poſſible, & d'en tirer enſuite les cas les plus ſimples comme des Corollaires. Mais ici, comme en beaucoup d'autres occaſions, j'ai crû devoir ſuivre un ordre opoſé, tant pour me rendre plus clair, que pour mettre tout de ſuite ſous les yeux du Lecteur, chaque Problême particulier dont il peut avoir beſoin.

C X I V.

P R O B L E M E. I.

Fig. 27. *Un corps quelconque ſans péſanteur, ou dont la péſanteur eſt ſoûtenuë par quelque obſtacle, étant attaché fixement en A au levier ACF parfaitement mobile autour du point ou pivôt fixe C: trouver la viteſſe qu'une force conſtante apliquée perpendiculairement en F au levier, imprimera à ce corps en un tems donné.*

SOLUTION.

Ayant nommé F la force apliquée en F*, Q la masse à mouvoir (en comprenant dans cette masse celle du levier, s'il est nécessaire), il est évident que le moment de la force F, qui est F × C F, doit être égal au moment du mouvement gagné par la masse Q autour de l'axe C [Art. XLIX.]. Or si l'on supose que dans un instant le levier passe de la situation F C A dans la situation *f* C*a*, ensorte qu'un point quelconque A du corps proposé décrive le petit arc A*a*; & que raisonnant ici comme on a fait dans l'Article LXXXI. pour trouver le moment du mouvement gagné par le corps G autour de l'axe GV [*Fig.* 15], on nomme M*bb* † la somme des produits des molécules du corps Q par les

* Il est à remarquer que cette force F peut n'être pas toute celle dont l'agent est capable, mais qu'elle est la partie de sa force absoluë, qu'il déploye contre le levier proposé.

† La quantité M *bb* (dans laquelle M est une masse donnée par la figure du corps Q, *b* une ligne aussi connuë par la même raison) se détermine géométriquement, comme on l'a enseigné [Art. LXXXIII]; mais dans la pratique on peut se contenter de partager la masse Q en plusieurs parties assez petites pour qu'elles puissent être regardées sensiblement comme des points; de multiplier ensuite chacune d'elles par le quarré de sa distance à l'axe C, & enfin d'ajoûter ensemble tous ces produits.

quarrés de leurs diftances à l'axe C, il eft clair que le moment du mouvement gagné par le corps Q autour de l'axe C, fera exprimé par $M\,b\,b \times \frac{A\,a}{CA}$: ainfi on aura l'équation

$$F \times CF = M\,b\,b \times \frac{A\,a}{CA}$$

ou bien

$$A\,a = \frac{F \times CF \times CA}{M\,b\,b}.$$

Maintenant fupofons que la force F foit égale à un poids dont la maffe = N, & nommons g la gravité naturelle : on aura $F = g\,N$, car tout poids eft égal au produit de fa maffe par la péfanteur [Art. XXVII]. De plus en fupofant que le petite efpace $A\,a$ ait été parcouru dans un inftant égal à celui que la gravité g employe à faire parcourir à un corps qui tombe librement, un petit efpace qu'on peut exprimer par la même lettre g, il eft clair que $A\,a$ pourra être regardé auffi comme l'expreffion de la force accélératrice qui anime le point A [Art. XXXIII formule K]. Donc fi l'on fait cette force accélératrice $A\,a = f$, $C\,A = a$ $C\,F = c$, on aura

$$f = \frac{g\,N\,a\,c}{M\,b\,b}.$$

On voit par cette équation que le mouvement du point A eſt uniformément accéléré, puiſque la force accélératrice f eſt à la gravité naturelle g dans le raport conſtant de Nac à Mbb, & que par conſéquent cette même force f eſt conſtante. On voit encore par la formule (K) de l'Article XXXIII. que ſi l'on multiplie les eſpaces déterminés dans les deux tables des articles XXXVI & XXXVII par la fraction $\frac{Nac}{Mbb}$, les produits ſeront les eſpaces parcourus par le point A, ſuivant les conditions énoncées pour les deux tables dont il s'agit. *C. Q. F. T.*

CXV.

PROBLEME II.

Supoſons maintenant que la maſſe Q à mouvoir ſoit livrée à l'action de la péſanteur, de manière que le levier F C A tourne dans un plan vertical, autour du point fixe C, ſans pouvoir gliſſer : on demande la viteſſe que la force F toûjours apliquée perpendiculairement en F communiquera à tout le Siſtême. Fig. 28.

SOLUTION.

Soit A le centre de gravité de toute la maſſe

Q à mouvoir. Par le point fixe C & par le point A, soit imaginée la ligne F C A faisant avec la verticale C O l'angle quelconque A C O. Qu'on prenne la verticale A N pour répésenter le poids absolu du corps Q, & soit décomposée cette force en deux autres, l'une A R dirigée suivant C A, l'autre A M perpendiculaire à C A; il est évident que la prémière force A R est détruite par la résistance du point C, & que la seconde A M est la seule qui tende à faire tourner le levier, & à le raprocher de la verticale C O. Suposons que dans un instant le levier passe de la situation FCA dans la situation $f\,Ca$, ensorte que le point A décrive le petit arc A a, Cela posé, imaginons que la force F est partagée en deux parties x & y, dont la prémière x feroit sans cesse équilibre à la force A M, & dont la seconde y est employée à mouvoir autour du point fixe C, la masse Q considérée comme non pésante, Il est clair qu'on aura dabord l'équation

$$(A) \qquad x \times CF = AM \times CA.$$

De plus nommant M bb la somme des produits des molécules du corps Q par les quar-

rés de leurs diſtances à l'axe C, on aura par l'Article précédent

$$(B) \qquad y \times CF = Mbb \times \frac{Aa}{CA}.$$

Supoſons
- La gravité naturelle . . . . $= g$
- La force accélératrice A a du point A . . . . $= f$
- La force motrice F $=$ à un poids connu dont la maſſe eſt N . . . . $= g$ N
- C A. . . . . $= a$
- C F . . . . $= c$
- Le ſinus total . . . . . . $= 1$
- Le ſinus de l'angle A C O . . $= q$.

On voit ſans peine que la force $AM = gQ \times \frac{q}{1} = qgQ$. Par conſéquent les deux équations (A) & (B) deviendront

$$cx = qgQa,$$

$$cy = \frac{Mbbf}{a};$$

d'où l'on tire

$$x + y = \frac{qgQa}{c} + \frac{Mbbf}{ca};$$

mais $x + y = F = g$ N; donc

$$g\,N = \frac{q\,g\,Q\,a}{c} + \frac{M\,b\,b\,f}{c\,a}.$$

Donç

$$f = \frac{g\,(c\,a\,N - q\,a\,a\,Q)}{M\,b\,b}.$$

Telle eſt l'expreſſion de la force accélératrice du point A. Comme le numérateur de cette fraction renferme le ſinus q de l'angle ACO qui varie à méſure que le levier tourne, on voit qu'en ſupoſant toutes les autres quantités conſtantes, la force accélératrice f n'eſt pas conſtante, & que par conſéquent le mouvement de rotation du levier n'eſt pas uniformément accéléré. Néanmoins dans la pratique on peut ſupoſer que durant les prémiers inſtants du mouvement, le ſinus q demeure ſenſiblement le même, & que le mouvement s'accélére uniformément.

Par éxemple, ſupoſons qu'au prémier inſtant le levier ſoit dans une poſition horizontale, enſorte que le ſinus $q =$ ſinus total $= 1$; que le poids $g\,Q = 300$ livres, $a = 4$ pieds, $c = 10$ pieds. Maintenant ſi on avoit ſeulement $g\,c\,N = g\,a\,Q$, ou $g\,N = 120$ livres, la force F ſeroit ſimplement en équilibre avec le poids $g\,Q$. Pour

mettre la machine en mouvement, ſupoſons gN ou $F = 122$ livres : de plus, ſupoſons qu'en déterminant la quantité Mbb comme nous l'avons preſcrit, la maſſe M étant, par éxemple, proportionelle à 300 livres, la ligne b ſoit trouvée $= 6$ pieds. On aura par toutes ces ſubſtitutions,

$$f = \frac{1}{135} g;$$

c'eſt-à-dire que la force accélératrice f ſera $\frac{1}{135}$ de la péſanteur ordinaire. Donc en conſultant les deux tables des Articles XXXVI & XXXVII, on voit que le point A parcourra environ 4 pieds pendant les 6 prémières ſecondes du mouvement, & qu'à la fin de ce tems il aura aquis une viteſſe capable de lui faire parcourir uniformément environ 1 pied 4 pouces, en une ſeconde. Ainſi ſi paſſé ce terme le mouvement de la machine demeure ſenſiblement uniforme, ſoit à cauſe de la diminution de la force F, ſoit à cauſe des changemens qui arrivent au ſinus q, on connoîtra du moins par aproximation la viteſſe de rotation du point A, & par conſéquent auſſi celle de tout autre point du levier. *C. Q. F. T.*

C X V I.

Remarque. Si au lieu de la force F, il y a en F un poids quelconque attaché fixement au levier, de manière que tout le Siſtême tourne librement ſur le point C, & que tout étant d'ailleurs le même que dans l'Article précédent, on nomme de plus H la maſſe du nouveau poids, R *k k* la ſomme des produits des molécules de H par les quarrés de leurs diſtances à l'axe C, *n* * le ſinus de l'angle que la droite F C tirée du centre de gravité F du corps H au point C, fait avec la verticale : on trouvera en un moment par la même méthode,

$$f = \frac{g\,(anc\,H - qaa\,Q)}{R\,kk + M\,bb};$$

d'où il eſt aiſé de juger en quel ſens tournera le levier, ſuivant la relation qu'on ſupoſera entre A & Q.

Ceci fournit (comme les Géomêtres le verront aiſément) une ſolution fort-ſimple & fort-élégante, ce me ſemble, du fameux Problême

* Je prens une nouvelle lettre *n* pour exprimer le ſinus de l'Angle dont il s'agit, parce qu'il peut ſe faire que les points A, C, F ne ſoient pas en ligne droite, & que par conſéquent *n* difère de *q*.

des centres d'oscillation. Je reviendrai sur ce Problême dans le Chapitre suivant.

CXVII.

PROBLEME III.

Deux poids inégaux P & Q étant atachés aux extrémités d'une corde P R Q qui passe sur une poulie suspenduë fixement & mobile sur son essieu : on demande la vitesse avec laquelle le plus grand P descendra, & fera monter le plus petit Q. Fig.19.

Je n'ai égard ici ni à l'inertie de la poulie, ni au frottement, ni à la roideur de la corde.

SOLUTION.

Il est visible que ce problême peut se résoudre par une méthode analogue à celle que j'ai suivie dans les deux Articles précédens, savoir en décomposant le poids moteur P en deux autres, dont l'un fasse simplement équilibre au poids Q, & dont l'autre soit employé à mouvoir la masse totale P + Q du sistême, considérée comme non pésante. Mais je vais employer d'une manière un peu plus directe le principe de la communication des mouvemens. Je fais d'avance la même remarque pour les Problêmes suivans, *mutatis mutandis*.

Supoſons que les deux corps P & Q, s'ils avoient été libres, euſſent parcouru en un inſtant par leur péſanteur naturelle les eſpaces égaux PN, QK; mais qu'à cauſe de l'action & de la réaction qu'ils éxercent l'un ſur l'autre, P parcoure PM en deſcendant, & Q parcoure QH= PM en montant. Il eſt évident que MN ſera la viteſſe perduë par le corps P dans l'inſtant propoſé, & que KH ſera la viteſſe gagnée par le corps Q en montant, pendant le même inſtant. Or il doit y avoir égalité entre le mouvement perdu par le corps P & le mouvement gagné par le corps Q [Art XLVIII]. Donc on aura l'équation

$$P \times MN = Q \times KH.$$

Les petits eſpaces PN, PM ou QH parcourus en vertu de la gravité naturelle, & en vertu de la force accélératrice qui anime maintenant chacun des points des maſſes P & Q, peuvent être regardés comme les expreſſions mêmes de ces deux forces. Ainſi ſupoſant la gravité $PN = g$, la force accélératrice actuelle PM ou $QH = f$, il eſt clair que l'équation précédente deviendra

$$P(g-f) = Q(g+f);$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{g(P-Q)}{P+Q}.$$

Cette équation fait voir que la force accélératrice simple f de chacun des deux corps proposés est à la gravité naturelle g dans le raport constant de (P—Q) à (P+Q) ; d'où il résulte que multipliant les espaces déterminés dans les tables des Articles XXXVI & XXXVII. par la fraction $\frac{P-Q}{P+Q}$, les produits seront les espaces parcourus par le corps P en descendant, & par le corps Q en montant, suivant les conditions des tems énoncées dans les deux Articles cités. *C. Q. F. T.*

On comprend assez l'usage de ce problême dans la pratique. Le grand poids P représente toute la force absoluë de l'agent qui meut la machine, le poids Q représente le fardeau à élever ; la dépense de force que fait l'agent pour enlever le fardeau malgré sa pésanteur, est exprimée par P $(g-f)$ ou $\frac{2gPQ}{P+Q}$ * ; & ce qui

* Ces sortes d'expressions $\frac{gPQ}{P+Q}$, $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$, gP, &c. représentent des poids ; car la lettre g représente la pésanteur,

reste de force au même agent, est exprimé par Pf ou $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$. Par éxemple, si l'agent est un homme, un cheval, &c. dont la force absoluë $= gP$, cet homme, ce cheval, &c. perd contre le fardeau une partie de sa force exprimée par $\frac{2gPQ}{P+Q}$, & il lui reste simplement une force exprimée par $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$ en vertu de laquelle il continuë à marcher.

CXVIII.

Corollaire. Il est évident que la partie C P de la corde est tenduë avec une force exprimée par $P(g-f)$ ou $\frac{2gPQ}{P+Q}$, & que la partie B Q est tenduë avec une force exprimée par $Q(g+f$ ou $\frac{2gPQ}{P+Q}$.

Ces deux forces égales produisent sur les appuis de la poulie une pression verticale à leur somme, & qui est par conséquent représentée par $\frac{4gPQ}{P+Q}$.

& les lettres P, Q, &c. représentent des masses; or le poids est le produit de la masse par la pésanteur; donc, &c.

Ainſi on connoît la réſiſtance dont la corde doit être capable, & la charge que ſoûtient l'obſtacle fixe qui porte là poulie. On peut remarquer au ſujet de cette dernière force, qu'elle eſt moindre que la ſomme des deux poids P & Q, au lieu que dans le ſimple état d'équilibre, elle eſt toûjours égale à la ſomme des poids, ou au double de l'un d'eux.

C X I X.

PROBLEME IV.

Tout étant d'ailleurs le même que dans le Problême précédent, on demande qu'on ait égard de plus à l'inertie de la poulie. *Fig.29.*

SOLUTION.

Puiſque la poulie eſt ſuſpenduë fixement par ſon centre, elle n'a par elle même aucune tendance à tourner plûtôt à droite qu'à gauche, & elle tournera toûjours dans le ſens du poids préponderant P. De plus il eſt clair que le moment du mouvement perdu par le corps P autour du centre de la poulie, doit être égal à la ſomme des momens des mouvemens gagnés par le corps Q & par la maſſe de la poulie, autour du même point. Or ſi l'on

nomme g la gravité naturelle, f la force accélératrice ſimple de chacun des points des maſſes P & Q, b le rayon de la poulie, Mkk la ſomme des produits des molécules de la poulie par les quarrés de leurs diſtances au centre; il eſt viſible que le moment du mouvement perdu par le corps P eſt $P(g-f)b$; que le moment du mouvement gagné par le corps Q eſt $Q(g+f)b$; que le moment du mouvement gagné par la poulie eſt $Mkk \times \frac{f}{b}$, car tous les points de la circonférence tournent avec la même viteſſe que deſcend le corps P, & que monte le corps Q. on aura donc

$$P(g-f)b = Q(g+f)b + \frac{Mkkf}{b};$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{g(Pbb - Qbb)}{Pbb + Qbb + Mkk}.$$

Ainſi la force accélératrice f eſt à la gravité g dans le raport conſtant de ($Pbb-Qbb$) à ($Pbb+Qbb+Mkk$); par conſéquent on connoîtra par les tables des Articles XXXVI & XXXVII. les eſpaces que les corps P & Q parcourront en un tems donné. *C. Q. F. T.*

CXX.

CXX.

Corollaire. les deux cordons C P, B Q sont visiblement tendus avec la même force; & comme la tension de B P est toûjours égale au mouvement perdu par le corps P, c'est-à dire à $P(g-f)$, il s'ensuit qu'en mettant pour f sa valeur, chacune des deux tensions proposées sera représentée par $\frac{gP(2Qbb+Mkk)}{Pbb+Qbb+Mkk}$.

Ces deux forces forces produisent sur le centre, ou sur les appuis de la poulie, une pression $= \frac{2gPQ(2Qbb+Mkk)}{Pbb+Qbb+Mkk}$.

Si on vouloit déterminer directement la tension de B Q, on considéreroit que cette force est égale à la somme du mouvement gagné par le corps Q, & du mouvement gagné par la masse de la poulie dans le sens Q B; car la machine se meut éxactement de la même manière que si à la place de la masse de la poulie, on attachoit fixément en un point quelconque du cordon B Q une masse non pésante qui oposat au mouvement la même résistance qu'opose la masse de la poulie. Or dans ce second cas la tension de B Q est égale au mouvement gagné

par le corps Q, plus au mouvement gagné par la nouvelle masse, ensorte que si l'on nomme R cette même masse, on aura la tension de $BQ=Q(g+f)+R\times f$. Mais puisque la masse R & la masse de la poulie oposent la même résistance au mouvement autour du centre, on a $R\times f\times b=\frac{Mkkf}{b}$, ou bien $R=\frac{Mkk}{bb}$;

donc la tension de $BQ=Q(g+f)+\frac{Mkk}{bb}=\frac{2gPQ(2Qbb+Mkk)}{Pbb+Qbb+Mkk}$.

Il est à propos de faire attention à cette remarque, pour évaluer sans peine les tensions des cordons, lorsque les forces qui les tendent n'ont pas les mêmes bras de levier par raport au centre du mouvement. Ici tous les points de la masse de la poulie n'ont pas les mêmes bras de levier relativement au centre de cette même poulie.

CXXI.

PROBLEME V.

Fig. 29. *Tout étant d'ailleurs le même que dans le Problème précédent, on demande qu'on ait de plus egard au frottement, & à la roideur de la corde.*

SOLUTION.

Soient
- La gravité naturelle . . . . $= g$
- La force accélératrice ſimple de chacun des points des corps P & Q . . . . $= f$
- Le rayon de l'eſſieu de la poulie $= a$
- Le rayon de la poulie en y comprenant celui de la corde . $= b$
- La ſomme des produits des molécules de la poulie par les quarrés de leurs diſtances au centre. $= Mkk$
- Le raport du frottement à la preſſion . . . . $= n$
- Le rayon de la corde . . . . $= c$.

Supoſons de plus qu'une corde dont le rayon eſt b, ſous une preſſion connuë N, en ſe pliant autour d'un rouleau dont le rayon augmenté de celui de la corde eſt m, ait une roideur égale à un poids connu q.

Cela poſé, il eſt clair que le moment du mouvement perdu par le corps P, autour du centre de la poulie, doit être égal à la ſomme faite du moment du mouvement gagné par le corps Q, du moment du mouvement gagné par la poulie, du moment du frottement, du moment de la

roideur de la corde, par raport au même centre. Or 1°. Le mouvement perdu par le corps P = $P(g-f)$; le moment de ce mouvement = $P(g-f)b$.

2°. Le mouvement gagné par le corps Q = $Q(g+f)$; le moment de ce mouvement = $Q(g+f)b$.

3° Le moment du mouvement gagné par la poulie = $\frac{Mkkf}{b}$.

4° Puisque chaque cordon CP, BQ est évidemment toûjours tendu avec une force égale au mouvement perdu par le corps P, c'est-à-dire à $P(g-f)$, & que par conséquent la pression de l'essieu sur la surface de son moyeu est $2P(g-f)$, il s'ensuit que le frottement sera exprimé par $2nP(g-f)$, & que le moment de cette force par raport au centre, sera exprimé par $2anP(g-f)$.

5°. On voit de même que la roideur de la corde aura pour valeur $\frac{2qmcP(g-f)}{Nbh}$, & que le moment de cette force, par raport au centre, sera $\frac{2qmcbP(g-f)}{Nbh} = \frac{2qmcP(g-f)}{Nb}$.

On aura donc

$$P(g-f)b = \begin{cases} Q(g+f)b + \frac{Mkkf}{b} + \\ 2anP(g-f) + \frac{2qmcP(g-f)}{Nb}. \end{cases}$$

D'où l'on tire (en faisant $\frac{qm}{Nb} = r$),

$$f = \frac{g(Pbb - Qbb - 2nabP - 2rbcP)}{Pbb + Qbb + Mkk - 2nabP - 2rbcP}.$$

Le raport de la force accélératrice f à la gravité g étant donné par le moyen de cette équation, on aura aussi le raport des espaces parcourus par nos deux corps aux espaces parcourus librement en vertu de la pésanteur. *C. Q. F. T.*

CXXII.

Corollaire. Chaque cordon CP, BQ est tendu avec une force $= P(g-f) = \frac{gP(2Qbb + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk - 2nabP - 2rbcP}$, & la pression verticale sur le centre, ou sur les apuis de la poulie $= \frac{2gP(2Qbb + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk - 2nabP - 2rbcP}$.

Il est inutile de grossir cet Ouvrage par des aplications des formules précédentes aux nom-

bres. Je ne m'arrête pas non plus aux autres problêmes qui concernent les poulies, soit simples, soit mouflées; ils se résoudront toûjours par les mêmes méthodes.

CXXIII.

PROBLEME. VI.

Fig. 30. *Suposons que le corps P descendant verticalement par sa pésanteur entraîne après lui le corps Q le long du plan incliné D B, à l'aide d'une corde P O Q qui passe sur une poulie fixée au sommet B du plan incliné, & dont la partie O Q est parallele à B D : on demande la vitesse des deux corps à chaque instant.*

Je n'ai égard ni à l'inertie de la poulie, ni au frottement, ni à la roideur de la corde.

SOLUTION.

Soient B C & C D, la hauteur & la bâse du plan incliné B D. Suposons que si les deux corps P & Q eussent été libres, en un instant P eut parcouru la verticale P N par sa pésanteur naturelle, & Q eut parcouru Q K par sa pésanteur relative; mais qu'à cause de leur mouvement forcé, P parcoure P M, & Q parcoure Q H. On aura [Art. XLVIII.] l'équation

$$P \times MN = Q \times KH.$$

Soient {
La gravité naturelle PN . . $= g$
La force accélératrice simple de chacun des points des corps
P & Q . . . . $= f$
BC . . . . $= d$
CD . . . . $= e$
BD . . . . $= \sqrt{dd+ee} = s.$
}

On aura $MN = g - f$, $QK = \frac{gd}{s}$, $KH = f + \frac{gd}{s}$; donc l'équation précédente se traduira ainsi

$$P(g-f) = Q\left(f + \frac{gd}{s}\right),$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{g\left(P - \frac{dQ}{s}\right)}{P+Q}. \text{ C. Q. F. T.}$$

CXXIV.

Corolaire. Les deux cordons ZP, OQ sont tendus chacun avec une force $= P(g-f)$

$= \frac{gP(Q+\frac{dQ}{s})}{P+Q}$. Mais la tension du cordon ZP est dirigée parallélement à BC, & celle du cordon OQ parallélement à BD. Pour déterminer la pression que ces deux forces produisent sur le centre A de la poulie, qu'on les représente par les droites AE, AG égales entr'elles, & paralleles respectivement à BC & à BD. La pression demandée sera représentée par la diagonale AF. Soient i le sinus de l'angle CBD, l le sinus de la moitié du même angle, le sinus total étant 1; l'expression analytique de AF sera $\frac{gP(Q+\frac{dQ}{s})}{P+Q} \times \frac{l}{i}$.

A l'égard de la pression contre le plan incliné BD, elle est toûjours $\frac{egQ}{s}$, la même que s'il n'y avoit pas de mouvement.

CXXV.

PROBLEME VII.

Fig. 30. *Tout étant d'ailleurs de même que dans le Problême précédent, on demande qu'on ait égard de plus à l'inertie de la poulie.*

SOLUTION.

Je garde toutes les dénominations de l'article précédent. Je nomme de plus, comme dans l'article CXIX, $M\kappa\kappa$ la somme des produits des molécules de la poulie par les quarrés de leurs distances au centre. Alors il est évident qu'on aura l'équation

$$P(g-f)b = Q\left(f+\frac{dg}{s}\right)b + \frac{M\kappa\kappa f}{b}$$

ou bien

$$f = \frac{g\left(Pbb - \frac{dQbb}{s}\right)}{Pbb+Qbb+M\kappa\kappa}$$

qui donne la relation de la force accélératrice f à la gravité g. *C. Q. F. T.*

CXXVI.

Corolaire. Les deux cordons ZP, OQ sont tendus chacun avec une force exprimée par

$$\frac{gP\left(Qbb+\frac{dQbb}{s}+M\kappa\kappa\right)}{Pbb+Qbb+M\kappa\kappa}$$

; & la pression résultante contre le centre de la poulie est exprimée par

$$\frac{gP\left(Qbb+\frac{dObb}{s}+M\kappa\kappa\right)}{Pbb+Qbb+M\kappa\kappa} \times \frac{l}{i}.$$

CXXVII.

PROBLEME VIII.

Fig. 30. *Tout étant d'ailleurs le même que dans le Problême précédent, on demande qu'on ait égard de plus au frottement, & à la roideur de la corde.*

SOLUTION.

Je commence par observer qu'il y a ici deux sortes de frottemens à considérer, l'un qui s'éxerce sur l'essieu de la poulie, l'autre sur le plan incliné B D. Celui-ci est d'ordinaire beaucoup plus considérable que le prémier, parce qu'on a soin de bien polir les essieux & de les graisser. Nous prendrons donc des nombres diférens pour exprimer les raports de ces deux frottemens aux pressions qui les produisent.

Je garderai toûjours les mêmes dénominations, & je nommerai de plus a le rayon de l'essieu de la poulie, c celui de la corde, b le rayon de la poulie augmenté de celui de la corde, n le raport du frottement contre l'essieu à la pression sur le même essieu, p le raport du frottement contre le plan incliné à la pression sur le même plan, q la roideur d'une corde donnée dont le rayon est h, qui se plie autour d'un rouleau dont le rayon augmenté de celui de la corde est m, &

qui eſt chargée d'un poids connu N.

Tout cela poſé, le mouvement perdu par le corps $P=P(g-f)$, le moment de ce mouvement par raport au centre de la poulie $=P(g-f)\ b$. Le mouvement gagné par le corps $Q=Q\ (f+\frac{dg}{s})$; Le moment de ce mouvement par raport au centre $=Q\ (f+\frac{dg}{s})b$. Le moment du mouvement gagné par la maſſe de la poulie$=M\kappa\kappa\times\frac{f}{b}$, comme ci-deſſus. La preſſion contre l'eſſieu de la poulie, étant exprimée en général par $P(g-f)\times\frac{l}{i}$, comme il eſt évident, le frottement contre le même eſſieu ſera $=nP\ (g-f)\times\frac{l}{i}$; le moment de ce frottement par raport au centre $=\frac{naP(g-f)l}{i}$. Le frottement contre plan incliné $BD=\frac{pgeQ}{s}$; le moment de ce frottement par raport au centre $=\frac{pgeQb}{s}$. Enfin la force abſoluë qui tend la corde, & qui l'empêche de ſe plier, étant

$2P(g-f)$, la roideur de cette même corde sera $= \frac{2qmcP(g-f)}{Nbh}$; le moment de la roideur par raport au centre $= \frac{2qmcP(g-f)}{Nh}$, comme ci-dessus. Il est vrai qu'ici la corde n'embrasse pas tout à fait un demi cercle, ce qui diminuë un peu sa roideur: mais je néglige cette circonstance.

Maintenant le moment du mouvement perdu par le corps P doit êtreégal à la somme de tous les autres momens. Ainsi on aura l'équation

$$P(g-f)b = \begin{cases} Q\,(f+\frac{dg}{s})b + \frac{M\kappa\kappa f}{b} + \\ \frac{naP(g-f)l}{i} + \frac{pegQb}{s} + \frac{2qmcP(g-f)}{Nh} \end{cases}$$

d'où on tire (en faisant $\frac{d}{s}=t$, $\frac{e}{s}=x$, $\frac{l}{i}=u$, $\frac{qm}{Nh}=r$),

$$f = \frac{g(Pbb - tQbb - nabuP - pxQbb - 2rbcP)}{Pbb + Qbb + M\kappa\kappa - nabuP - 2rbcP}$$

équation qui donne la relation de la force accélératrice f à la gravité g. *C. Q. F. T.*

CXXVIII.

Corolaire. Chaque cordon est tendu avec

une force $= \frac{gP(Qbb + tQbb + pxQbb + M\kappa\kappa)}{Pbb + Qbb + M\kappa\kappa - nabuP - 2rbcP}$;

& la pression contre le centre de la poulie $=$

$$\frac{gP(Qbb + tQbb + pxQbb + M\kappa\kappa)u}{Pbb + Qbb + M\kappa\kappa - nabuP - 2rbcP}.$$

CXXIX.

PROBLEME IX.

Deux corps P & Q étant attachés aux extrêmités de deux cordes qui se roulent sur deux poulies ou rouës concentriques, mais de rayons diférens, & suposant que P descende par sa pésanteur, & fasse monter Q, on demande les vitesses des deux rouës à chaque instant. *Fig. 31.*

Je n'ai égard ni à l'inertie des rouës, ni au frottement, ni aux roideurs des deux cordes.

SOLUTION.

Suposons que les deux corps P & Q, s'ils avoient été libres, eussent parcouru en un instant en vertu de leur pésanteur naturelle, les espaces égaux P N, Q K; mais qu'à cause de leur mouvement forcé, P parcoure PM en descendant, & Q parcoure Q H en montant. Cela posé, le moment du mouvenent perdu par

le corps P doit être égal au moment du mouvement gagné pur le corps Q; ainsi tirant les rayons AC, AB, on aura l'équation

$$P \times MN \times AB = Q \times KH \times AC.$$

Soient { La gravité naturelle PN ou QK $= g$
La force accélératrice PM de chacun des points du corps P . . . . $= p$
La force accélératrice QH de chacun des points du corps Q $= q$
Le rayon CA de la petite rouë $= a$
Le rayon AB de la grande rouë $= b$.

L'équation précédente se traduira ainsi

$$P(g-p)b = Q(g+q)a.$$

De plus il est évident que les vitesses p & q avec lesquelles tournent les points B & C des deux rouës sont proportionelles aux rayons des mêmes rouës; que par conséquent on a $p : q :: b : a$ Donc

$$pa = qb.$$

Comparant ensemble ces deux équations, on trouvera

$$p = \frac{g(Pbb - Qab)}{Pbb + Qaa},$$

$$q = \frac{g(Pab - Qaa)}{Pbb + Qaa}.$$

D'où l'on voit qu'on a les raports des deux forces accélératrices p & q à la gravité g, & que par conséquent on connoîtra aussi les espaces parcourus par nos deux corps dans un tems donné. *C. Q. F. T.*

CXXX.

COROLAIRE. Le cordon BP est tendu avec une force égale au mouvement perdu par le corps P, & qui est par conséquent exprimée par $P(g-f) = \frac{gP(Qaa+Qab)}{Pbb+Qaa}$. De même le cordon CQ est tendu avec une force égale au mouvement gagné par le corps Q, & qui est par conséquent exprimée par $Q(g+q) = \frac{gQ(Pbb+Pab)}{Pbb+Qaa}$.

Ces deux forces produisent sur le centre A commun aux deux rouës une pression verticale égale à leur somme, & qui a par conséquent pour expression $\frac{gP(Qaa+Qab)}{Pbb+Qaa} + \frac{gQ(Pbb+Pab)}{Pbb+Qaa}$ $= \frac{gPQ(aa+2ab+bb)}{Pbb+Qaa} = \frac{gPQ(a+b)^2}{Pbb+Qaa}$.

Je croirois tomber dans des longueurs superfluës & ennuïeuses, d'anàlyser encore en détail les cas où il faudroit avoir égard à l'inertie des rouës, au frottement, & aux roideurs des cordes. Ces Problêmes ne peuvent avoir aucune dificulté pour ceux qui auront lû ce qui précéde avec attention, & qui auront saisi l'esprit de la remarque qu'on a faite dans l'Article C X X.

C X X X I.

PROBLEME X.

Fig. 71. *Soit O M C une rouë de voiture qui roule sur le terrain G H en vertu d'une force donnée F dont la direction A F passe par son centre A, & est parallele au plan G H: on demande la vitesse de la rouë.*

SOLUTION.

Nous avons déja fait quelques considérations générales sur ce Problême dans les Articles C V, C V I; nous allons y ajoûter ici quelque chose.

Il est d'abord évident, comme nous l'avons remarqué, que s'il n'y avoit pas de frottement en M, la rouë n'auroit qu'un simple mouvement progressif, de sorte que nommant P la masse entiére

entière à mouvoir, f la force accélératrice ſimple du centre A, on auroit l'équation

$$F = P \times f,$$

ou bien

$$f = \frac{F}{P};$$

mais ce cas n'a pas lieu dans la nature.

Je ſupoſe donc qu'à meſure que le centre A marche dans le ſens G H, il y ait en M une force M V qui oblige la rouë à tourner dans le ſens opoſé C M O, en obſervant néanmoins que cette force M V eſt une force purement paſſive qui n'a d'éxercice qu'autant que la force F lui en procure. Je ſupoſe de plus que le centre de gravité du poids de la rouë, & des fardeaux étrangers dont elle peut être chargée, ſoit ſitué, au moins ſenſiblement, dans le plan qui paſſe par l'axe A du mouvement, & qui eſt parallele au terrain G H. Maintenant,

Soient
- La force abſoluë M V . . . . $= H$
- La maſſe de toute la machine . . $= P$
- La force accélératrice ſimple du centre A . . . . $= f$
- La force accélératrice ſimple de rotation du point M . . . $= m$

O

Soient { La somme des produits des parties de la rouë qui tournent, par les quarrés de leurs distances à l'axe A du mouvement $= Mkk$
Le rayon Aq de l'essieu $xqy = a$
Le rayon AM de la rouë OCM $= b$.

1°. On aura [Art. LXXX] l'équation

$$F - H = P \times f.$$

Ou bien

$$f = \frac{F - H}{P}.$$

2°. La force H est employée à faire tourner la rouë, & à vaincre le frottement de l'essieu contre le moyeu. Ainsi le moment de H, c'est-à-dire Hb, doit être égal au moment du mouvement gagné par la rouë en tournant, plus au moment du frottement. Or le moment du mouvement de rotation est $M\,k\,k \times \frac{m}{b}$. Pour trouver le moment du frottement, je représente par Ar la force F, ou la pression de l'essieu contre le moyeu, dans le sens AF; par Am la pression connuë (que je nomme R) de l'essieu contre le moyeu, dans le sens AM. Puis ayant achevé le parallelogramme rectan-

gle A rnm, je tire la diagonale A n. Il eſt clair que cette diagonale A n, dont la valeur eſt $\sqrt{FF+RR}$, exprime la preſſion du point q de la ſurface de l'eſſieu contre celle du moyeu. Donc ſi l'on nomme n le raport du frottement à la preſſion, le frottement dont il s'agit eſt $n\sqrt{FF+RR}$, & le moment de ce frottement par raport au centre A, eſt $na\sqrt{FF+RR}$. On aura donc l'équation

$$H \times b = \frac{Mkkm}{b} + na\sqrt{FF+RR}$$

ou bien

$$m = \frac{Hbb - nab\sqrt{FF+RR}}{Mkk}. \quad C.\ Q.\ F.\ T.$$

CXXXII.

Corolaire. L'expérience apprend que dans une rouë qui roule librement ſur le terrain, le centre A & le point M ont ſenſiblement la même viteſſe. En combinant cette expérience avec les formules précédentes, on a un moyen fort-ſimple pour déterminer la force H, quoiqu'il ſoit dificile d'aſſigner bien diſtinctement la cauſe phyſique qui produit cette force. Car ſupoſant $f = m$, on aura une équation dans la-

quelle H ſera la ſeule inconnuë.

Je paſſe rapidement ſur ces conſéquences qui réſultent de nos formules. On voit que les deux mouvemens de la rouë vont d'abord en s'accélérant; mais bientôt, comme nous l'avons remarqué en général dans l'Article CXIII, ces deux mouvemens parviennent ſenſiblement à l'uniformité, ou ſi l'on aime mieux, ils ſont ſucceſſivement accélérés & retardés dans des intervalles de tems fort-courts, de manière que la viteſſe primitivement acquiſe paroît à-peu-près uniforme. Les animaux qui trainent la voiture, après lui avoir imprimé la viteſſe permanente & uniforme dont on vient de parler, ne ſont plus à chaque inſtant que ſoûlever cette même voiture des cavités du terrain où elle s'enfonce, & par là ils ſont naître en M une force dont la fonction eſt de vaincre continuellement le frottement de l'eſſieu contre le moyeu.

CXXXIII.

Scholie. Tous les Problêmes qui regardent le mouvement des machines ſont réductibles à quelques uns des précédens, ou du moins peuvent être traités par les méthodes que nous avons expoſées. Si à une étude aprofondie de

ces méthodes, on joint encore des connoiſſances dans les calculs diférentiel & intégral, on donnera aux ſolutions toute la généralité poſſible. On réſoudra auſſi une infinité d'autres queſtions tres-curieuſes & très-utiles que j'ai été obligé de paſſer ſous ſilence. De ce genre ſont celles qui ont pour objet les *maxima* & les *minima* dans les machines. Je m'explique par des éxemples. Étant donnés (Fig. 31) le poids moteur P, le rayon A B, le fardeau Q à élever, on peut demander quel doit être le rayon A C du tambour auquel le fardeau eſt apliqué, pour que le même fardeau ſoit élevé à la plus grande hauteur poſſible, dans le moins de tems qu'il eſt poſſible : ou bien reciproquement, étant donnés le poids P, le rayon A B, le rayon A C, on peut demander quel doit être le fardeau Q, pour que ce fardeau, ſoit élevé à la plus grande hauteur poſſible, dans le moins de tems qu'il eſt poſſiple, &c. Or ces diférentes recherches pour leſquelles on a, dans ce qui précéde, toutes les *données* que la Méchanique doit fournir, ne peuvent s'achever que par la géomêtrie des infiniment petits. Cette géomètrie eſt un inſtrument

dont toutes les parties des mathématiques ont sans cesse besoin, & dont on ne sauroit trop aprendre à se bien servir.



CHAPITRE V.

Solutions de diférens Problêmes de Dynamique.



POur fortifier de plus en plus nos Lecteurs dans l'usage des principes de Dynamique, je donnerai encore ici la solution de plusieurs Problêmes intéressans, sans m'assujettir d'ailleurs à aucun ordre bien méthodique.

§. 1. *Du Mouvement des Pendules.*

CXXXIV.

Fig. 33. ON apelle *Pendule simple* un petit poids P suspendu par un fil ou une verge de masse insensible, qui oscille librement autour d'un point fixe C.

Le Pendule est *composé* lorsque la verge est

chargée de plusieurs petits poids, ou même d'un seul gros poids, ou lorsqu'ayant une masse sensible elle est chargée d'un nombre quelconque de poids quelconques.

Chaque allée d'un Pendule depuis un point quelconque P ou p, jusqu'au point p' où le pendule cesse de monter pour redescendre, s'apelle une *oscillation simple*, ou tout briévement une *oscillation*. On donne le même nom au retour depuis le point p' jusqu'au point P ou p.

On sent que les oscillations d'un Pendule composé, ne doivent pas être de même durée que feroient celles d'un des poids particuliers qui le composent, si ce poids étoit isolé, parce que tous ces poids se troublent dans leurs mouvemens par l'action & la réaction qu'ils exercent les uns sur les autres. Mais on peut toûjours assigner la longueur d'un Pendule simple qui fasse ses oscillations dans le même tems que le Pendule composé. Cette longueur tient un certain milieu entre les distances de tous les poids qui forment le Pendule composé, jusques au point de suspension. Nous donnerons ce Problême, après avoir expliqué les propriétés fondamentales des Pendules simples.

CXXXV.

PROPOSITION I.

Fig. 33. *Les oscillations d'un Pendule simple qui décrit de très-petits arcs de cercle, sont sensiblement isochrones entr'elles, c'est-à-dire de même durée.*

DÉMONSTRATION.

Soient PA, *p* A deux petits arcs parcourus successivement par le Pendule P : je dis que ces arcs sont parcourus en tems égaux. Car si on représente le poids du Pendule par les petites verticales égales PN, *p n*, & qu'on décompose la force P N en deux autres PO, PM, la prémière dirigée suivant le rayon C P, la seconde suivant l'arc P A; la force *pn*, en deux autres *p o*, *p m*, la prémière dirigée suivant le rayon C *p*, & la seconde suivant l'arc *p* A, il est clair que les forces PO, *p o*, sont détruites, & que les forces PM, *p m*, sont celles qui poussent, dans les deux cas, le Pendule vers la verticale C A. Or puisque l'arc P A est très petit, le triangle P C A peut passer pour un triangle rectiligne rectangle, & comme ce triangle est évidemment semblable au triangle PNM, on au-

ra $PM = PN \times \frac{PA}{CA}$. On aura pareillement $pm = pA \times \frac{pn}{CA}$. Donc $PM : pm :: PN \times \frac{PA}{CA} : pn \times \frac{pA}{CA}$; donc à cause de $pn = PN$, $PM : pm :: PA : pA$, c'est-à-dire que les forces PM, pm, qui doivent faire parcourir les espaces PA, p A au même corps P, sont proportionelles à ces espaces; donc ces mêmes espaces (Art. XLIII.) doivent être parcourus en tems égaux. *C. Q. F. D.*

CXXXVI.

PROPOSITION II.

Les durées des oscillations de deux Pendules simples de longueurs diférentes sont entr'elles comme les racines quarrées des mêmes longueurs. Fig. 33. & 34.

DÉMONSTRATION.

Il est clair que la proposition sera démontrée en général, si l'on fait voir seulement qu'elle est vraie lorsque les petits arcs décrits par les deux Pendules, sont semblables entr'eux, puisque les oscillations de chaque Pendule en particulier sont isochrones, quelques que puissent être

les arcs décrits, pourvû qu'ils soient toujours fort-petits.

Soit donc P A, Q B des petits arcs semblables décrits pàr les deux Pendules P & Q, jusques aux verticales C A, E B. Soit F & f respectivement les forces absoluës qui poussent les poids P & Q suivant P A, & suivant QB. On aura, comme il est évident par l'Article précédent, $F = P \times \frac{PA}{CA}$, $f = Q \times \frac{QB}{EB}$; donc $F : f :: P \times \frac{PA}{CA} : Q \times \frac{QB}{EB}$; mais à cause des arcs semblables P A, Q B, $\frac{PA}{CA} = \frac{QB}{EB}$; donc $F : f :: P : Q$; donc les forces F & f sont entr'elles comme les poids des corps P & Q; donc [Art XXXV.] les mêmes forces sont entr'elles comme les masses des corps qu'elles animent; donc (même Art. formule N) les tems employés à parcourir les espaces P A, Q B sont comme les racines quarrées des mêmes espaces P A, Q B; donc enfin les tems dont il s'agit sont comme les racines quarrées des longueurs C A, E B. *C. Q. F. D.*

CXXXVII.

Corolaire. On voit par là que lorſqu'on connoîtra la durée d'une oſcillation d'un Pendule ſimple de longueur *donnée*, on connoîtra par une ſimple proportion la durée d'une oſcillation de tout autre Pendule. Or l'expérience aprend qu'un Pendule ſimple de 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes environ de longueur, fait une oſcillation en une ſeconde. On peut donc conſtruire une table des tems des oſcillations de toutes ſortes de Pendules ſimples.

Venons maintenant au Problême que nous avons annoncé ci-deſſus.

CXXXVIII.

PROBLEME.

Déterminer la longueur EQ d'un Pendule ſimple (Fig. 34) qui faſſe ſes oſcillations dans le même tems que le Pendule CP (Fig. 35.) compoſé de tant de corpuſcules S, R, P qu'on voudra. Fig. 34. & 35.

SOLUTION.

J'ai dejà indiqué la ſolution de ce Problême dans l'Article CXVI ; mais je crois devoir la préſenter ici ſous un point de vuë un peu diférent, afin de faire entendre de mieux en

mieux comment les corps se transmettent le mouvement par leurs actions & réactions mutuelles.

Fig. 35. Suposons que tous les corps S, R, P soient enfilés par une même verge infléxible C P qui fait avec la verticale C A l'angle quelconque A C P. Des points S, R, P soient abaissées sur C A les perpendiculaires S s, R r, P A. Soit nommé g la gravité naturelle, & soit décomposée cette force accélératrice simple en deux autres, dont l'une soit dirigée suivant la verge (& soit par conséquent détruite), & l'autre perpendiculairement à la verge, ou suivant les arcs décrits par les points S, R, P. Il est clair que cette dernière force sera exprimée par $g \times \frac{Ss}{CS}$, ou par $g \times \frac{Rr}{CR}$, ou par $g \times \frac{PA}{CA}$, ou en général par $g \times \frac{\text{sin. ACP}}{\text{sin. tot.}}$. Suposons que les corps S, R, P eussent parcouru en un instant, en vertu de la force dont on vient de parler, les petits espaces égaux S i, R d, P g, si chacun d'eux avoit été attaché seul à la verge; mais qu'à cause de l'action & de la réaction qu'ils exercent les uns sur les autres, la verge à la fin de l'instant proposé, parvienne

dans la ſituation C o. Il eſt évident que hi eſt la viteſſe perduë par le corps S, & que de & go ſont les viteſſes gagnées en conſéquence par les deux corps R & P. On aura donc l'équation

$$S \times hi \times CS = R \times de \times CR + P \times go \times CP.$$

Soient:
- CS . . . . $= a$
- CR . . . . $= b$
- CP . . . . $= c$
- La force accélératrice ſimple S h du corps S . . . . $= f$
- Le ſinus total . . . . $= 1$
- Le ſinus de l'angle ACP . . $= r$.

On aura, comme il eſt évident, $Si = Rd = Pg = rg$, $Re = \frac{fb}{a}$, $Po = \frac{fc}{a}$: donc $hi = rg - f$, $de = \frac{fb}{a} - rg$, $go = \frac{fc}{a} - rg$.

Par conſéquent l'équation précédente deviendra

$$S(gr - f)a = R\left(\frac{fb}{a} - gr\right)b + P\left(\frac{fc}{a} - gr\right)c;$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{gr(Saa + Rab + Pac)}{Saa + Rbb + Pcc}.$$

Ou bien (en ſupoſant que le point H eſt le

le centre de gravité du ſiſtême des corps S, R, P, & conſidérant que par la propriété du centre de gravité on a $Sa+Rb+Pc=(S+R+P)\times CH$),

$$f=gr\times\frac{CS\times(S+R+P)\times CH}{S\times\overline{CS}^2+R\times\overline{CR}^2+P\times\overline{CP}^2}.$$

Telle eſt à chaque inſtant la force accélératrice ſimple du corps S, quelque puiſſe être l'angle que fait la verge avec la verticale.

Maintenant pour trouver la longueur du Pendule ſimple E Q qui fait ſes oſcillations dans le même tems que le Pendule composé, on fera l'angle B E Q = l'Angle A C P. Ces deux angles doivent être fort-petits, ſi l'on veut que non ſeulement les oſcillations correſpondantes, ou de même amplitude, des deux pendules, ſoient de même durée, mais encore que les oſcillations ſoient, au moins ſenſiblement, de même durée, quoique les amplitudes ſoient différentes. Cela poſé, on voit que la force accélératrice ſimple du corps Q ſuivant Q B ſera exprimée par $g\times r$. Or puiſque les eſpaces Q B, S *s* ſont parcourus en tems égaux par une même maſſe (ſavoir par l'une des molécules *égales* de matière dans leſquelles les corps S, R, P,

Fig. 34. & 35.

Q ſont cenſés diviſés), ces eſpaces doivent être proportionels aux forces qui les font parcourir [Art. XLIII]; ainſi on aura la proportion

$$gr : gr \times \frac{CS \times (S+R+P) \times CH}{S \times \overline{CS}^2 + R \times \overline{CR}^2 + P \times \overline{PC}^2} :: QB :$$

S s :: EQ : CS (à cauſe de la ſimilitude des Secteurs QEB, SCs);

donc

$$EQ = \frac{S \times \overline{CS}^2 + R \times \overline{CR}^2 + P \times \overline{PC}^2}{(S+R+P) \times CH}.$$

D'où l'on voit que pour avoir l'expreſſion de la longueur du Pendule ſimple EQ ſinchrone au Pendule compoſé, il faut ajoûter enſemble tous les produits de chaque corps du Pendule compoſé par le quarré de ſa diſtance au point de ſuſpenſion C, & diviſer la ſomme par le produit de la ſomme de tous les corps multipliée par la diſtance du centre de gravité du ſiſtême au même point de ſuſpenſion. *C. Q. F. T.*

CXXXIX.

REMARQUE. Si les corps S, R, P ne ſont pas enfilés par une même verge, mais que diſpo- *Fig. 36.*

posés comme on voudra, ils soient attachés solidement entr'eux d'une manière quelconque, & que tout le sistême oscille toûjours autour du point fixe C; il est clair que si l'on fait $CS = a$, $CR = b$, $CP = c$, la force accélératrice simple du corps $S = f$, le sinus total $= 1$, le sinus de l'angle $ACS = m$, le sinus de l'angle $ACR = n$, le sinus de l'angle $ACP = q$, il est clair, dis-je, qu'en raisonnant comme dans l'article précédent, on aura l'équation

$$f = \frac{g(mSaa + nRab + qPac)}{Saa + Rbb + Pcc}.$$

Or si ayant suposé que le point H est le centre de gravité du sistême, on tire la droite CH; qu'ensuite on méne perpendiculairement à la verticale CA, les droites Ss, Rr, Pp, Hh; on aura par la propriété du centre de gravité

$$S \times Ss + R \times Rr + P \times Pp = (S + R + P) \times Hh.$$

Mais $Ss = ma$, $Rr = nb$, $Pp = qc$, $Hh = r \times CH$ (en nommant r le sinus de l'angle ACH); par conséquent on aura

$$f = gr \times \frac{CS \times (S + R + P) \times CH}{S \times \overline{CS}^2 + R \times \overline{CR}^2 + P \times \overline{CP}^2}:$$

D'où

D'où l'on voit que l'angle du pendule simple synchrone au pendule composé, avec la verticale, doit être fait égal à l'angle A C H. Le reste s'achéve comme ci-dessus, & on en tire la même conclusion.

§. 2. *Du Mouvement d'un corps envelopé d'un fil qui se déroule.*

C X L.

PROBLEME I.

Soit un corps P partagé en deux parties égales & semblables par le plan R F H, & suposons que ce corps soit traversé perpendiculairement par un essieu cylindrique C B D dont l'axe passe par son centre de gravité P, & autour duquel s'envelope le fil ECDB attaché fixement en E: on demande la vitesse avec laquelle le poids proposé descendra, lorsqu'après avoir mis la partie EC du fil dans une situation verticale, on l'abandonnera à lui-même. Fig. 37.

SOLUTION.

Puisque la partie E C du fil est verticale au prémier instant, il s'ensuit que ce même fil réagira suivant la direction C E parallele à celle de la pésanteur, & fera tourner le corps autour de

P.

l'axe de l'essieu. Donc [Art. LXXX.] le centre de gravité du corps descendra toûjours suivant une ligne verticale, & la partie E C du fil demeurera aussi toûjours verticale. De plus si l'on méne les horizontales A E, P C, il est évident qu'à cause de $AP = EC$, la vitesse avec laquelle le point C tournera sera la même que la vitesse verticale du centre de gravité P.

Cela posé, soient P N l'espace que le centre de gravité P auroit parcouru en un instant par la pésanteur, si le corps étoit tombé librement, P M l'espace que ce même point P parcourt à cause de la réaction du fil.

Suposons	La gravité naturelle P N . . $= g$
	La force accélératrice P M, ou la force de rotation du point C . . . . $= f$
	Le rayon P C . . . . $= a$
	La masse du corps proposé . . $= P$
	La somme des produits des molécules de ce même corps par les quarrés de leurs distances à l'axe P . . . . . $= Mkk$.

Le mouvement perdu par le corps P sera exprimé par $P(g-f)$. Ce mouvement doit être ima

giné réagir ſuivant C E, & produire en conſéquence le mouvement de rotation du corps autour de ſon centre de gravité. Donc le moment de $P(g-f)$, par raport au centre P, eſt égal au moment du mouvement de rotation, autour du même centre. Ainſi on aura l'équation

$$P(g-f)a = \frac{M\kappa\kappa f}{a};$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{gPaa}{Paa+Mkk}$$

équation qui donne le raport de la force accélératrice f à la gravité g. *C. Q. F. T.*

CXLI.

COROLAIRE. Donc la tenſion du fil E C, qui eſt évidemment égale au mouvement perdu par le corps P, ſera exprimée par $P(g-f) = \frac{gPM\kappa\kappa}{Paa+Mkk}$.

Par exemple ſi le corps propoſé ſe réduit au cercle CBD, on trouvera, en évaluant la quantité $M\kappa\kappa$, comme on l'a enſeigné dans l'Article LXXXV, & faiſant les autres réductions,

$$f = \frac{2}{3}g,$$

de ſorte que la viteſſe avec laquelle le cercle deſ-

cendra dans le cas de notre problême, sera les deux tiers de la vitesse avec laquelle il seroit descendu librement par sa pésanteur.

Quant à la tension du fil, elle sera égale à

$$g \times \frac{\overline{CP}^2}{6}.$$

CXLII.

PROBLEME II.

Fig. 38. *Tout étant d'ailleurs le même que dans le Problême précédent, supposons que le fil, au lieu d'être arrêté en E, passe sur une poulie fixe E, & même, s'il est nécessaire, sur une seconde poulie X de renvoy; & qu'un corps Q attaché à son extrémité Q descende avec l'excès de son poids sur celui qui seroit simplement requis pour faire équilibre à la force perduë par le corps P : on demande les expressions des forces accélératrices des deux corps Q & P.*

SOLUTION.

Soient les petits espaces égaux QK, PN ceux que les deux corps auroient parcourus en un instant par leur pésanteur naturelle; QH, PM les espaces qu'ils parcourent réellement par leur mouvement forcé,

Supofons
- La gravité naturelle QK ou PN $= g$
- La force accélératrice QH . . $= q$
- La force accélératrice PM . . $= p$
- La force de rotation du point C $= f$
- Le rayon PC . . . . . . $= a$
- La fomme des produits des molécules du corps P par les quarrés de leurs diftances à l'axe P . . . . . $= M\kappa\kappa$.

Cela pofé, 1°. Le mouvement perdu par le corps Q, qui peut être cenfé dirigé fuivant CE, agit fur le centre P de gravité du corps P, de la même manière que fi le fil CE paffoit par ce point [Art. LXXX.]. Ainfi il eft évident qu'on aura $Q \times HK = P \times MN$ ou bien

$$(A) \qquad Q(g-q) = P(g-p).$$

2°. On voit par les Articles LXXX & LXXXI, que le moment du mouvement perdu par le corps Q par raport au centre P, doit être égal au moment du mouvement gagné par le corps P en tournant autour du même point P. Ainfi on aura l'équation

$$(B) \qquad Q(g-q)a = \frac{M\kappa\kappa f}{a}.$$

3°. On remarquera que si le centre P étoit fixe, on auroit $f = q$; mais puisque le point C descend de la quantité p dans le tems que le point Q descend de la quantité q, il est clair qu'on aura

$$(C) \qquad f = q + p.$$

Comparant ensemble les trois équations (A), (B), (C), & dégageant les trois inconnuës q, p, f, on trouvera

$$q = \frac{g(PQaa + QMkk - PMkk)}{PQaa + QMkk + PMkk},$$

$$p = \frac{g(PQaa + PMkk - QMkk)}{PQaa + QMkk + PMkk},$$

$$f = \frac{2gPQaa}{PQaa + QMkk + PMkk}.$$

C. Q. F. T.

CXLIII.

Corolaire. On voit par ces formules tout ce qui peut arriver aux mouvemens des deux corps proposés. Si on a

$$PMkk - QMkk = PQaa$$

ou bien

$$Q = \frac{PMkk}{Paa + Mkk},$$

on aura $q = 0$. Alors le corps Q ne montera ni ne defcendra. Ce corps fera par raport au corps P la même fonction que faifoit le point fixe E dans le problême précédent, & on aura

$$gQ = P(g - p) = \frac{gPMkk}{Paa + Mkk}.$$

Si lon a

$$PMkk > PQaa + QMkk$$

ou

$$Q < \frac{PMkk}{Paa + Mkk},$$

le corps Q montera, au lieu de defcendre comme on l'a fupofé, parce qu'alors la valeur de q devient négative.

Si l'on a

$$QMkk > PQaa + PMkk$$

ou

$$Q > \frac{PMkk}{Mkk - Paa},$$

le point P montera au lieu de defcendre comme on l'a fupofé, parce qu'alors la valeur de p eft négative.

&c.

Il eft facile de déterminer les preffions des centres des deux poulies, quelle que puiffe être la direction du fil X A.

§. 3. *Du Mouvement angulaire constant que conserve un corps autour de son centre de gravité, lorsqu'on dispose suivant une certaine loi d'autres petits corps qu'on lui ajoûte.*

COmme j'aurai besoin d'un Lemme qui est d'ailleurs extrêmement utile dans une infinité de recherches de Dynamique, je vais commencer par le donner ici.

CXLIV.

LEMME

Fig. 39. *Si l'on a un Sistême quelconque de corpuscules A, B, C, &c. solidement liés entr'eux d'une manière quelconque, & situés ou non situés dans un même plan : je dis que la somme des produits de tous ces corpuscules par les quarrés de leurs distances à un axe quelconque H qui ne passe pas par le centre de gravité du Sistême, est égale à la somme des produits des mêmes corpuscules par les quarrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité & parallele au premier, plus au produit de la somme des corpuscules multipliée par le quarré de la distance des deux axes.*

C'eſt-à-dire que ſi l'on ſupoſe que le point G repréſente un axe paſſant par le centre de gravité & parallele à l'axe H, & qu'on méne les droites AH, BH, CH, &c. AG, BG, CG, &c. on aura

$$A\times\overline{AH}^2+B\times\overline{BH}^2+C\times\overline{CH}^2+\text{\&c.}=A\times\overline{AG}^2+B\times\overline{BG}^2+C\times\overline{CG}^2+\text{\&c.}+(A+B+C+\text{\&c.})\times\overline{GH}^2.$$

DÉMONSTRATION.

Des points A, B, C, &c. ſoient abaiſſées ſur GH & ſur ſon prolongement, les perpendiculaires AN, BE, CM, &c.: on aura, dans le triangle AGH,

$$\overline{AH}^2=\overline{AG}^2+\overline{GH}^2-2\,GH\times GN;$$

donc

$$A\times\overline{AH}^2=A\times\overline{AG}^2+A\times\overline{GH}^2-A\times 2\,GH\times GN:$$

dans le triangle Obtuſangle BGH,

$$\overline{BH}^2=\overline{BG}^2+\overline{GH}^2+2\,GH\times GE;$$

donc

$$B\times\overline{BH}^2=B\times\overline{BG}^2+B\times\overline{GH}^2+2B\times GH\times GE:$$

dans le triangle Acutangle CGH,

$$\overline{CH}^2=\overline{CG}^2+\overline{GH}^2-2GH\times GM;$$

donc

$$C \times \overline{CH}^2 = C \times \overline{CG}^2 + C \times \overline{GH}^2 - C \times 2 GH \times GM.$$

Par conséquent on aura

$$A \times \overline{AH}^2 + B \times \overline{BH}^2 + C \times \overline{CH}^2 + \&c. = A \times \overline{AG}^2 + B \times \overline{BG}^2 + C \times \overline{CG}^2 + A \times \overline{GH}^2 + B \times \overline{GH}^2 + C \times \overline{GH}^2 + A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM - B \times 2GH \times GE + \&c.$$

Or le point G étant le centre de gravité du corps ou un axe passant par le centre, on a, comme on sait,

$$A \times GN + C \times GM = B \times GE;$$

donc on aura aussi

$$A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM = B \times 2GH \times GE$$

ou bien

$$A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM - B \times 2GH \times GE = 0;$$

par conséquent enfin

$$A \times \overline{AH}^2 + B \times \overline{BH}^2 + C \times \overline{CH}^2 + \&c. = A \times \overline{AG}^2 + B \times \overline{BG}^2 + C \times \overline{CH}^2 + \&c. + (A + B + C + \&c.) \times \overline{GH}^2.$$ *C. Q. F. D.*

CXLV.

Corollaire. Il est clair que cette démonstration s'aplique à un corps de grandeur quelconque, puisqu'il est permis de regarder ce

corps comme le Siſtême d'une infinité de corpuſcules A, B, C, &c. On peut donc poſer ce principe général : *La ſomme des produits des particules d'un corps quelconque par les quarrés de leurs diſtances à un axe qui ne paſſe pas par ſon centre de gravité, eſt égale à la ſomme des produits des mêmes particules par les quarrés de leurs diſtances à un axe paſſant par le centre de gravité & parallele au prémier, plus au produit de la maſſe entière du corps multipliée par le quarré de la diſtance des deux axes.*

CXLVI.

PROBLEME

Supoſons qu'un corps repréſenté par la droite AB * *qui paſſe par ſon centre de gravité ſoit frapé par une force donnée F : il s'agit de trouver une courbe MKM' (qu'il faut regarder comme une petite verge infléxible liée inébranlablement au corps) telle que plaçant & fixant ſur ſa circonférence des petits corps égaux, l'angle de rotation que produit la force F autour du centre de gravité demeure toûjours le même.* Fig. 40.

* Ce Problême eſt fort utile dans l'arrimage des Navires. Le corps propoſé & ceux qu'on lui ajoûte ſont cenſés dépouillés de leur péſanteur, parce que cette force eſt ſoûtenuë par le fluide dans lequel le Siſtême eſt plongé.

SOLUTION.

Il eſt clair [Art. LXXX] que la force F imprime deux mouvemens au corps propoſé, l'un de tranſlation parallele à ſa direction, l'autre de rotation autour du centre de gravité. Il n'eſt pas moins évident que le prémier mouvement ſera toûjours le même, quelles que puiſſent être les places des petits corps qu'on veut ajoûter au corps en queſtion. Mais toutes ces places ne ſont pas indiférentes relativement au mouvement de rotation, & il s'agit de trouver la courbe qui en eſt le *lieu géomètrique*, ſuivant les conditions du Problême.

On voit ſans peine que la courbe cherchée M K M' doit être diviſée en deux parties égales & ſemblables par la droite A B, & qu'en la formant, il faudra à chaque opération, placer de part & d'autre de A B deux corps égaux dans les deux points ſymétriques M & M', ou ce qui revient au même, partager un petit corps donné en deux parties égales, & placer ces deux parties aux points M & M' reſpectivement. Soit pris le point fixe K pour l'origine de la courbe, & ſoient K P, P M ou P M' les coordonnées pour le point M ou M'. Soient G le centre de

gravité du corps avant l'addition des deux nouveaux corps égaux aux points M & M', g le centre de gravité après l'addition de ces deux corps, $b\,x\,c$ l'angle de rotation du corps A B.

Supofons

- La diftance FG de la force F au centre de gravité primitif G . . . $= a$
- GK . . . . $= c$
- La maffe du corps A B avant l'addition des deux nouveaux corps . . . . $= P$
- Chacun des deux nouveaux corps . . . . $= p$
- La fomme des produits des particules de P par les quarrés de leurs diftances au centre de gravité primitif G . . $= Mkk$
- La fomme des produits des particules de tout le Siftême $P+2p$ par les quarrés de leurs diftances au nouveau centre de gravité g . . . . . . $= Z$
- L'angle de rotation pour le rayon $1 = u$
- KP . . . . $= x$
- PM . . . . $= y$.

On aura par la propriété du centre de gravité, $Gg = \frac{2p(c-x)}{P+2p}$; donc $Fg = a + \frac{2p(c-x)}{P+2p}$.

Dans le triangle rectangle GPM, on a $\overline{GM}^2 = yy + (c-x)^2$. De plus en vertu de l'article précédent on a

$$Mkk + 2p(yy + (c-x)^2) = Z + (P+2p)\frac{4pp(c-x)^2}{(P+2p)^2};$$

donc

$$Z = Mkk + \frac{2Pp(yy+(c-x)^2) + 4p^2y^2}{P+2p}.$$

Mais on a toûjours pour déterminer le mouvement de rotation cette équation

$$F \times \left(a + \frac{2p(c-x)}{P+2p}\right) = Z \times u \times 1;$$

donc, en mettant pour Z sa valeur, & dégageant u, on aura

$$u = \frac{F.\left(a + \frac{2p(c-x)}{P+2p}\right)}{Mkk + \frac{2Pp(c-x)^2 + (2Pp+4p^2)y^2}{P+2p}}.$$

Égalant cette valeur de u à une constante, & observant qu'à l'origine de la courbe où x

& y ſont zero, cette conſtante =

$$\frac{F \times \left(a + \frac{2pc}{P+2p} \right)}{M\kappa\kappa + \frac{2Ppcc}{P+2p}}$$, on aura

$$\frac{a + \frac{2pc}{P+2p}}{M\kappa\kappa + \frac{2Ppcc}{P+2p}} = \frac{a + \frac{2p.(c-x)}{P+2p}}{M\kappa\kappa + \frac{2Pp(c-x)^2 + (2Pp+4p^2)y^2}{P+2p}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{P+2p}{P} yy = \frac{(2aP^2c + 4aPpc + 2Ppcc - M\kappa\kappa P - 2pMkk)}{P.(aP + 2ap + 2pc)} x - xx.$$

Cette équation eſt, comme on voit, celle d'une Ellipſe qui ne difére pas beaucoup d'un cercle, parce que p eſt très-petit en comparaiſon de P. *C. Q. F. T.*

CONCLUSION.

Rien ne ſeroit plus aiſé que d'étendre davantage ces élémens de Dynamique; mais la choſe paroît inutile. Il ſuffit d'avoir établi des principes ſimples & féconds, & d'avoir montré par diférentes aplications, la manière dont ils doivent être employés.

FIN.

EXTRAIT
DES REGISTRES
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
Du 12 *Juin* 1762.

MESSIEURS Camus, d'Alembert & Bézout qui avoient été nommés pour éxaminer un Ouvrage qui a pour Titre *Traité élémentaire de Méchanique & de Dynamique par Monsieur l'Abbé Bossut, Professeur de Mathématiques de l'École Royale du Génie à Mézières, & Correspondant de l'Académie*, en ayant fait leur raport : l'Académie a jugé que le Livre de Mr. l'Abbé Bossut, méritoit d'autant plus d'être aprouvé, qu'indépendamment du détail & de la netteté, si nécessaires à un Traité élémentaire, avec lesquels il présente les objets qu'il s'est proposés, celui des Machines en mouvement qu'il y considére, & sur lequel quoique très-important, on avoit jusqu'ici peu écrit en faveur des Commençans, ne peut manquer de le rendre utile. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat, à Paris le 28 Juin 1762. GRAND-JEAN DE FOUCHY, Sécrétaire perpétuel de l'Acad. Royale des Sciences.

TABLE DES MATIÉRES.

242

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : à nos Amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans-Civils, & autres nos Justiciers qu'il apartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilége pour l'Impression de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposans, nous leurs avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches ou Observations journalières, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & qu'ils seront jugés dignes de l'Impression, en tels Volumes, Forme, Marge, Caractères, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes ; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il puisse en être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie ; faisons défenses à toutes sortes de Personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en

introduire d'Impreſſion étrangère dans aucun lieu de notre obéiſſance, comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes Traductions ou Extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la Permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auſdits Expoſans : ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotéque publique, un à celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité deſdites Préſentes, du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir leſdits Expoſans & leurs ayant cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſoûfrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des préſentes qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée : & qu'aux copies colla-

tionnées par l'un de nos amez féaux Conseillers & Sécrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au prémier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pour l'éxécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuviéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cens cinquante, & de notre Régne le trente cinquiéme. Par le Roy, en son Conseil. MOL.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430. fol. 309. conformement au Réglement de 1723, qui fait défenses, article 4. à toutes Personnes, de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; à la Charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108. du même Réglement. A Paris le 5. Juin 1750. Signé, LE GRAS, Syndic.

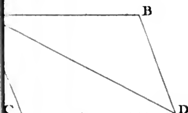


Fig. 1.
B
C
D

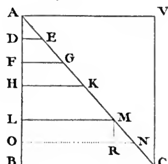
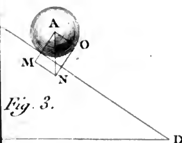
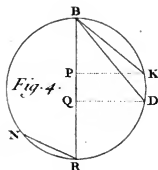


Fig. 2
A
V
D
E
F
G
H
K
L
M
O
N
R
B
C



A
O
M
N
Fig. 3.
D



B
P
K
Fig. 4.
Q
D
N
R

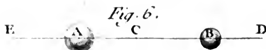


Fig. 6.
E
A
C
B
D

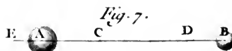
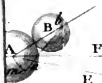


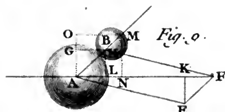
Fig. 7.
E
A
C
D
B



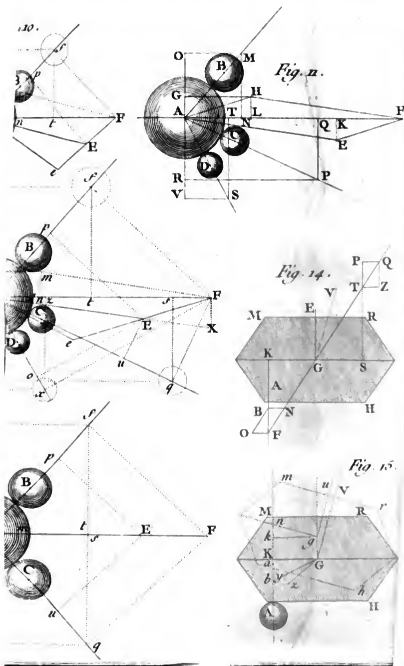
O
M
K
D



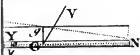
B
b
A
F
E

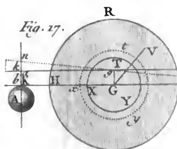


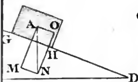
O
B
M
Fig. 9.
G
L
K
A
N
F
E

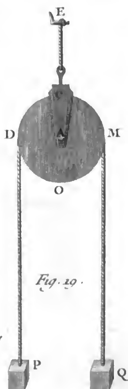


10.
Fig. 11.
O
M
B
G
H
A
T
L
F
N
Q
K
C
E
D
R
P
V
S
Fig. 14.
P
Q
T
Z
V
E
M
R
K
G
S
A
B
N
H
O
F
Fig. 15.
m
u
V
M
R
n
k
g
K
G
a
b
y
z
h
H
A


Fig . 16 .
V
Y
g
G
N
y


Fig . 27 .
R
t
V
n
k
T
g
b
H
X
G
Y
A


. 18 .
A
O
G
H
M
N
D


E
C
D
A
M
O
P
Q
Fig . 19 .

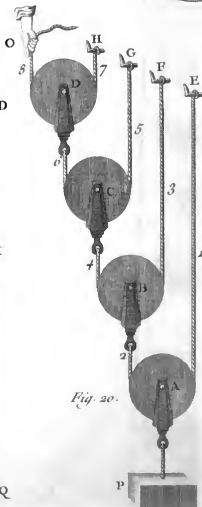

O
H
G
F
E
8
D
7
5
6
C
3
4
B
1
2
A
P
Fig . 20 .



Fig. 21.

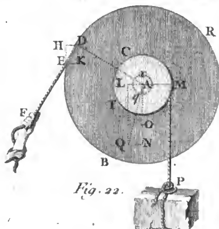
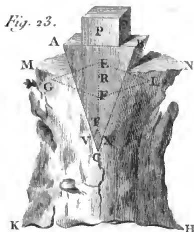


Fig. 22.

Fig. 23.



P

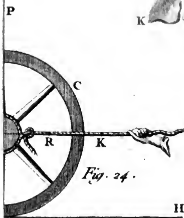


Fig. 24.

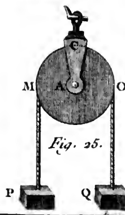
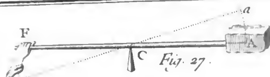
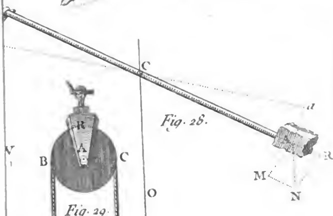
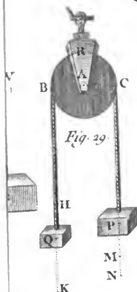
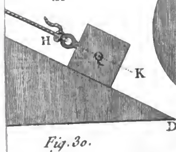


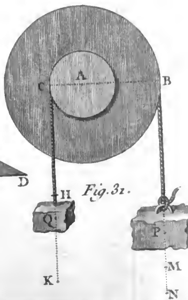
Fig. 25.


F
C
a
A
Fig. 27.


C
a
Fig. 28.
R
M
N
O


R
A
B
C
Fig. 29.
H
Q
P
M
N
K


H
Q
K
D
Fig. 30.


A
C
B
H
Fig. 31.
Q
P
K
M
N

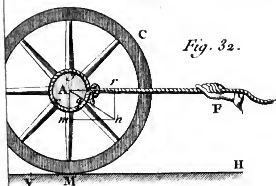
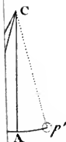


Fig. 32.



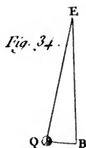


Fig. 34.

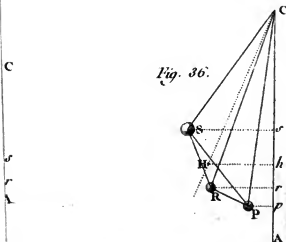


Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 40



